

Teoria das Probabilidades I

Ana Maria Lima de Farias
Universidade Federal Fluminense

Conteúdo

1	Probabilidade - Conceitos Básicos	1
1.1	Introdução	1
1.2	Experimento aleatório, espaço amostral e evento	1
1.2.1	Experimento aleatório	2
1.2.2	Espaço amostral	2
1.2.3	Eventos aleatórios	2
1.3	Operações com eventos aleatórios	5
1.3.1	Interseção	5
1.3.2	Exclusão	6
1.3.3	União	6
1.3.4	Complementação	7
1.3.5	Diferença	7
1.3.6	Propriedades das operações	8
1.3.7	Princípio da Dualidade	12
1.3.8	Diferença Simétrica	12
1.4	Somatórios	14
1.5	Produtórios	17
1.6	Exercícios Resolvidos	17
1.7	Exercícios Propostos	22
2	Princípio da Indução Matemática	26

2.1	Conceitos básicos	26
2.2	Exemplos	29
2.2.1	Soma dos n primeiros números naturais	29
2.2.2	Soma dos produtos de dois naturais consecutivos	30
2.2.3	Soma dos quadrados dos n primeiros números naturais	31
2.2.4	Soma dos n primeiros ímpares positivos	32
2.2.5	Soma dos cubos de três números naturais consecutivos	32
2.3	Definição por recorrência	33
2.4	Exercícios propostos	41
3	Análise combinatória	43
3.1	Princípio Fundamental da Adição	43
3.2	Princípio Fundamental da Multiplicação	45
3.3	Permutações	47
3.4	Arranjos	49
3.5	Combinações Simples	51
3.6	Triângulo de Pascal e Binômio de Newton	55
3.6.1	Aplicações	62
3.7	Permutações Circulares	66
3.8	Permutações de Objetos nem Todos Distintos	67
3.9	Soluções inteiras de equações lineares	67
3.10	Combinações com repetição ou combinações completas	71
3.11	Exercícios propostos	71
4	Probabilidade: Axiomas e Propriedades	77
4.1	Introdução	77
4.2	Definição axiomática de probabilidade	77
4.3	Propriedades da probabilidade	78

4.4	Espaços amostrais finitos e equiprováveis	81
4.5	Exercícios propostos	89
5	Probabilidade condicional e independência de eventos	91
5.1	Introdução	91
5.2	Probabilidade condicional como lei de probabilidade	95
5.3	Regra geral da multiplicação	97
5.4	Independência de eventos	103
5.5	Exercícios Propostos	107
6	Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes	112
6.1	Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes	123
6.2	Exercícios Propostos	125

Capítulo 1

Probabilidade - Conceitos Básicos

1.1 Introdução

No nosso cotidiano, lidamos sempre com situações em que está presente a incerteza do resultado, embora, muitas vezes, os resultados possíveis sejam conhecidos. Por exemplo: o sexo de um embrião pode ser masculino ou feminino, mas só saberemos o resultado exato quando o experimento se concretizar, ou seja, quando o bebê nascer. Se estamos interessados na face voltada para cima quando jogamos um dado, os resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5, 6, mas só saberemos o resultado quando o experimento se completar, ou seja, quando o dado atingir a superfície sobre a qual foi lançado. É conveniente, então, dispormos de uma medida que exprima a incerteza presente em cada um destes acontecimentos. Tal medida é a *probabilidade*.

1.2 Experimento aleatório, espaço amostral e evento

Consideremos o lançamento de um dado. Queremos estudar a proporção de ocorrências das faces desse dado. O primeiro fato a observar é que existem apenas 6 resultados possíveis, as faces 1, 2, 3, 4, 5, 6. O segundo fato é uma suposição sobre o dado: em geral, é razoável supor que este seja equilibrado. Assim, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes e, portanto, essa proporção deve ser $\frac{1}{6}$. Nessas condições, nosso modelo probabilístico para o lançamento de um dado pode ser expresso da seguinte forma:

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Frequência teórica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Suponhamos que uma mulher esteja grávida de trigêmeos. Sabemos que cada bebê pode ser do sexo masculino (M) ou feminino (F). Então, as possibilidades para o sexo das três crianças

são: MMM, MMF, MFM, FMM, FFM, FMF, MFF, FFF. Uma suposição razoável é que todos esses resultados sejam igualmente prováveis, o que equivale dizer que cada bebê tem igual chance de ser do sexo masculino ou feminino. Então cada resultado tem uma chance de $\frac{1}{8}$ de acontecer e o modelo probabilístico para esse experimento seria

Sexo	MMM	MMF	MFM	FMM	FFM	FMF	MFF	FFF	Total
Freq. teórica	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Por outro lado, se só estamos interessados no número de meninas, esse mesmo experimento leva ao seguinte modelo probabilístico:

Meninas	0	1	2	3	Total
Freq. teórica	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Nesses exemplos, vemos que a especificação de um modelo probabilístico para um fenômeno casual depende da especificação dos *resultados possíveis* e das respectivas *probabilidades*. Vamos, então, estabelecer algumas definições antes de passarmos à definição propriamente dita de probabilidade.

1.2.1 Experimento aleatório

Um *experimento aleatório* é um processo que acusa variabilidade em seus resultados, isto é, repetindo-se o experimento sob as mesmas condições, os resultados serão diferentes. Contrapondo aos experimentos aleatórios, temos os experimentos *determinísticos*, que são experimentos que, repetidos sob as mesmas condições, conduzem a resultados idênticos. Neste curso, estaremos interessados apenas nos experimentos aleatórios.

1.2.2 Espaço amostral

O *espaço amostral* de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento. Vamos denotar tal conjunto pela letra grega ômega maiúscula, Ω . Quando o espaço amostral é finito ou infinito enumerável, é chamado espaço amostral *discreto*. Caso contrário, isto é, quando Ω é não enumerável, vamos chamá-lo de espaço amostral *contínuo*.

1.2.3 Eventos aleatórios

Os subconjuntos de Ω são chamados *eventos aleatórios* e os elementos de Ω são chamados *eventos elementares*. Os eventos, sendo conjuntos, serão representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto, enquanto os elementos de um evento serão representados por letras minúsculas.

EXEMPLO 1.1 *Lançamento de uma moeda*

O lançamento de uma moeda é um experimento aleatório, uma vez que, em cada lançamento, mantidas as mesmas condições, não podemos prever qual das duas faces (cara ou coroa) cairá para cima. Por outro lado, se colocarmos uma panela com água para ferver e anotarmos a temperatura de ebulição da água, o resultado será sempre 100°C . Logo, este é um experimento determinístico.

EXEMPLO 1.2 *Lançamento de um dado*

Consideremos o experimento aleatório “lançamento de um dado”. O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sendo, portanto, um espaço discreto. Os eventos elementares são $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Outros eventos são: “face par” = $\{2, 4, 6\}$, “face ímpar” = $\{1, 3, 5\}$, “face ímpar menor que 5” = $\{1, 3\}$, etc.

EXEMPLO 1.3 *Lançamento de duas moedas*

Consideremos o lançamento simultâneo de duas moedas. Vamos representar por K a ocorrência de cara e por C a ocorrência de coroa. Um espaço amostral para esse experimento é $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$, que também é um espaço discreto. Os eventos simples são $\{KK\}$, $\{KC\}$, $\{CK\}$, $\{CC\}$ e um outro evento é “cara no primeiro lançamento” = $\{KC, KK\}$. Para esse mesmo experimento, se estamos interessados apenas no número de caras, o espaço amostral pode ser definido como $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

EXEMPLO 1.4 *Medição do nível de ruído*

Seja o experimento que consiste em medir, em decibéis, diariamente, durante um mês, o nível de ruído na vizinhança da obra de construção do metrô em Ipanema. O espaço amostral associado a este experimento é formado pelos números reais positivos, sendo, portanto, um espaço amostral contínuo. Um evento: observar níveis superiores a 80 decibéis, representado pelo intervalo $(80, \infty)$, que corresponde a situações de muito barulho.

EXEMPLO 1.5 *Bolas em uma urna*

Uma urna contém 4 bolas, das quais 2 são brancas (numeradas de 1 a 2) e 2 são pretas (numeradas de 3 a 4). Duas bolas são retiradas dessa urna, sem reposição. Defina um espaço amostral apropriado para esse experimento e os seguintes eventos:

- A : a primeira bola é branca;
- B : a segunda bola é branca;
- C : ambas as bolas são brancas;

Solução:

Considerando a numeração das bolas, o espaço amostral pode ser definido como:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i, j) : i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4; i \neq j\} \\ &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}\end{aligned}$$

Os eventos são:

$$\begin{aligned}A &= \{(i, j) : i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4; i \neq j\} \\ &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \{(i, j) : i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2; i \neq j\} \\ &= \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (1, 2), (3, 2), (4, 2)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= \{(i, j) : i = 1, 2; j = 1, 2; i \neq j\} \\ &= \{(1, 2), (2, 1)\}\end{aligned}$$

EXEMPLO 1.6 *Cartas de um baralho*

Três cartas são retiradas, sem reposição, de um baralho que tem três cartas de cada uma das cores azul, vermelha, preta e branca. Dê um espaço amostral para esse experimento e liste os eventos:

- A : todas as cartas selecionadas são vermelhas;
- B : uma carta vermelha, uma carta azul e uma carta preta são selecionadas;
- C : três diferentes cores ocorrem;
- D : todas as quatro cores ocorrem.

Solução:

Vamos denotar por A, V, P e B as cores azul, vermelha, preta e branca, respectivamente. Então

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = A, V, P, B; i = 1, 2, 3\}$$

Os eventos são:

$$A = \{(V, V, V)\}$$

$$B = \{(V, A, P), (V, P, A), (A, V, P), (A, P, V), (P, V, A), (P, A, V)\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (V, A, P), (V, P, A), (A, V, P), (A, P, V), (P, V, A), (P, A, V), \\ (V, A, B), (V, B, A), (A, V, B), (A, B, V), (B, V, A), (B, A, V), \\ (V, B, P), (V, P, B), (B, V, P), (B, P, V), (P, V, B), (P, B, V), \\ (B, A, P), (B, P, A), (A, B, P), (A, P, B), (P, B, A), (P, A, B) \end{array} \right\}$$

Como temos quatro cores diferentes e apenas três extrações, não é possível obter todas as cores; logo,

$$D = \emptyset$$

1.3 Operações com eventos aleatórios

1.3.1 Interseção

O evento *interseção* de dois eventos A e B é o evento que equivale à ocorrência simultânea de A e B (ver **Figura 1.1**). Seguindo a notação da teoria de conjuntos, a interseção de dois eventos será representada por $A \cap B$.

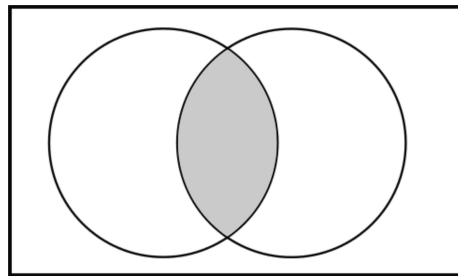


Figura 1.1 – Interseção de dois eventos: $A \cap B$

Note que

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \quad (1.1)$$

EXEMPLO 1.7 Lançamento de dois dados - continuação

Consideremos o experimento “lançamento de dois dados” e os eventos A = “soma das faces é um número par” e B = “soma das faces é um número maior que 9”. Calcule $A \cap B$.

Solução:

O espaço amostral desse experimento, que tem 36 elementos, é

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 6)\}$$

Para que um elemento pertença à interseção $A \cap B$, ele tem que pertencer simultaneamente ao evento A e ao evento B . O evento B é

$$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Dos seus elementos, os únicos que pertencem ao evento A , isto é, que têm soma das faces par, são os eventos $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$ e $(6, 6)$. Logo, $A \cap B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)\}$. Note que não precisamos listar o evento A ! Ele tem 18 elementos!

1.3.2 Exclusão

Dois eventos A e B são *mutuamente exclusivos* quando eles não podem ocorrer simultaneamente, isto é, quando a ocorrência de um impossibilita a ocorrência do outro. Isto significa dizer que os eventos A e B não têm elementos em comum. Então, dois eventos A e B são mutuamente exclusivos quando sua interseção é o conjunto vazio, isto é, $A \cap B = \emptyset$ (ver **Figura 1.2**).

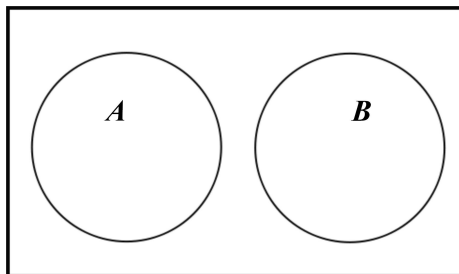


Figura 1.2 – Eventos mutuamente exclusivos: $A \cap B = \emptyset$

EXEMPLO 1.8 Lançamento de dois dados

Consideremos novamente o experimento “lançamento de dois dados” e sejam os eventos A = “soma das faces é ímpar” e B = “duas faces iguais”. Então, A e B são mutuamente exclusivos porque a soma de dois números iguais é sempre um número par!

1.3.3 União

A *união* de dois eventos A e B é o evento que corresponde à ocorrência de pelo menos um deles. Note que isso significa que pode ocorrer apenas A , ou apenas B ou A e B simultaneamente. Esse evento será representado por $A \cup B$ (ver **Figura 1.3**).

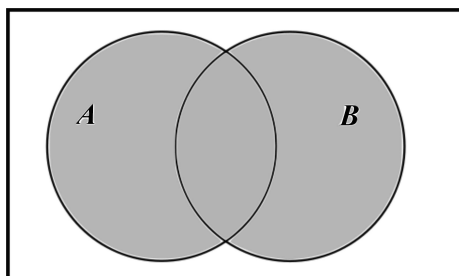


Figura 1.3 – União de dois eventos: $A \cup B$

Note que

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B \quad (1.2)$$

EXEMPLO 1.9 Lançamento de duas moedas

Consideremos o experimento do lançamento de duas moedas, onde o espaço amostral é $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$. Sejam os eventos $A = \text{“ocorrência de exatamente 1 cara”}$ e $B = \text{“duas faces iguais”}$. Então $A = \{KC, CK\}$ e $B = \{CC, KK\}$; logo, $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$. Seja C o evento “pelo menos uma cara”; então $C = \{KC, CK, KK\}$ e $B \cup C = \Omega$ e $B \cap C = \{KK\} \neq \emptyset$.

1.3.4 Complementação

O *complementar* de um evento A , denotado por $\bar{A}$ ou A^c , é a negação de A . Então, o complementar de A é formado pelos elementos que *não* pertencem a A (ver **Figura 1.4**).

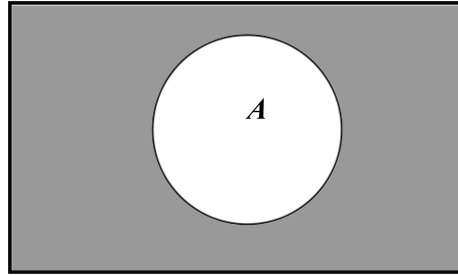


Figura 1.4 – Complementar do evento $A = \bar{A}$

Note que

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A \quad (1.3)$$

e também que

$$A \cup \bar{A} = \Omega \quad (1.4)$$

EXEMPLO 1.10 Lançamento de um dado

Consideremos o lançamento de um dado e seja $A = \text{“face par”}$. Então, $\bar{A}$ é o evento “face ímpar”. Note que $A = \{2, 4, 6\}$ e $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ e $\Omega = A \cup \bar{A}$.

1.3.5 Diferença

A *diferença* entre dois eventos A e B , representada por $A \setminus B$, é o evento formado pelos elementos do espaço amostral que pertencem a A mas não pertencem a B (ver **Figura 1.5**). Note que podemos pensar em $A \setminus B$ como o complementar de B *relativo* ao evento A .

Note que

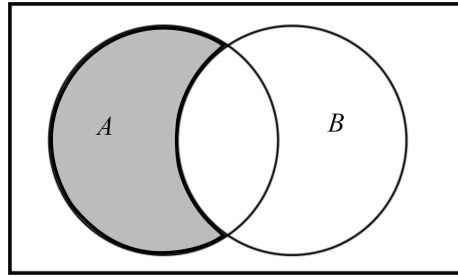
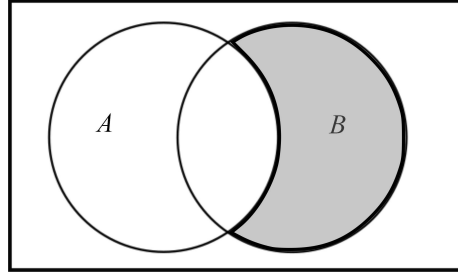
$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \Leftrightarrow x \in A \cap \bar{B} \quad (1.5)$$

e também

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \quad (1.6)$$

Além disso, $A \setminus B \neq B \setminus A$, conforme ilustrado na **Figura 1.6**.

De maneira análoga, $B \setminus A$ é o complementar de A *relativo* ao evento B .

**Figura 1.5** – Diferença $A \setminus B$ **Figura 1.6** – Diferença $B \setminus A$ **EXEMPLO 1.11** *Lançamento de dois dados*

Consideremos novamente o lançamento de dois dados e os eventos $A = \text{“soma das faces é par”}$ e $B = \text{“soma das faces é maior que 9”}$. Vamos considerar as duas diferenças, $A \setminus B$ e $B \setminus A$. Temos que

$$A = \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \right. \\ \left. (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \right\}$$

$$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Logo,

$$A \setminus B = \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \right. \\ \left. (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (6, 2) \right\}$$

$$B \setminus A = \{(5, 6), (6, 5)\}$$

1.3.6 Propriedades das operações

Sejam A, B, C eventos de um espaço amostral Ω . Então valem as seguintes propriedades.

1. Identidade

$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cup \Omega &= \Omega \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}A \cup \emptyset &= A \\ A \cap \Omega &= A\end{aligned}\tag{1.8}$$

(Note que Ω é o equivalente do conjunto universal da teoria de conjuntos.)

2. Complementar

$$\begin{aligned}\overline{\Omega} &= \emptyset \\ \overline{\emptyset} &= \Omega\end{aligned}\tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}A \cap \overline{A} &= \emptyset \\ A \cup \overline{A} &= \Omega\end{aligned}\tag{1.10}$$

3. Involução

$$\overline{\overline{A}} = (A^c)^c = A$$

4. Idempotência

$$\begin{aligned}A \cap A &= A \\ A \cup A &= A\end{aligned}\tag{1.11}$$

5. Comutatividade

$$\begin{aligned}A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A\end{aligned}\tag{1.12}$$

6. Associatividade

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C)\end{aligned}\tag{1.13}$$

7. Distributividade

$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)\end{aligned}\tag{1.14}$$

A ilustração da primeira propriedade está na **Figura 1.7**. Na linha superior, ilustramos o lado esquerdo da igualdade $A \cap (B \cup C)$: no diagrama à esquerda temos o evento A e no diagrama do centro temos o evento $B \cup C$. Para sombrear a interseção desses dois eventos, basta sombrear as partes que estão sombreadas em ambos os diagramas, o que resulta no diagrama à direita, onde temos o evento $A \cap (B \cup C)$. Na linha inferior, ilustramos o lado direito da igualdade $(A \cap B) \cup (A \cap C)$: no diagrama à esquerda temos o evento $A \cap B$ e no diagrama do centro, o evento $A \cap C$. Para sombrear a união desses dois eventos, basta sombrear todas as partes que estão sombreadas em algum dos diagramas, o que resulta no

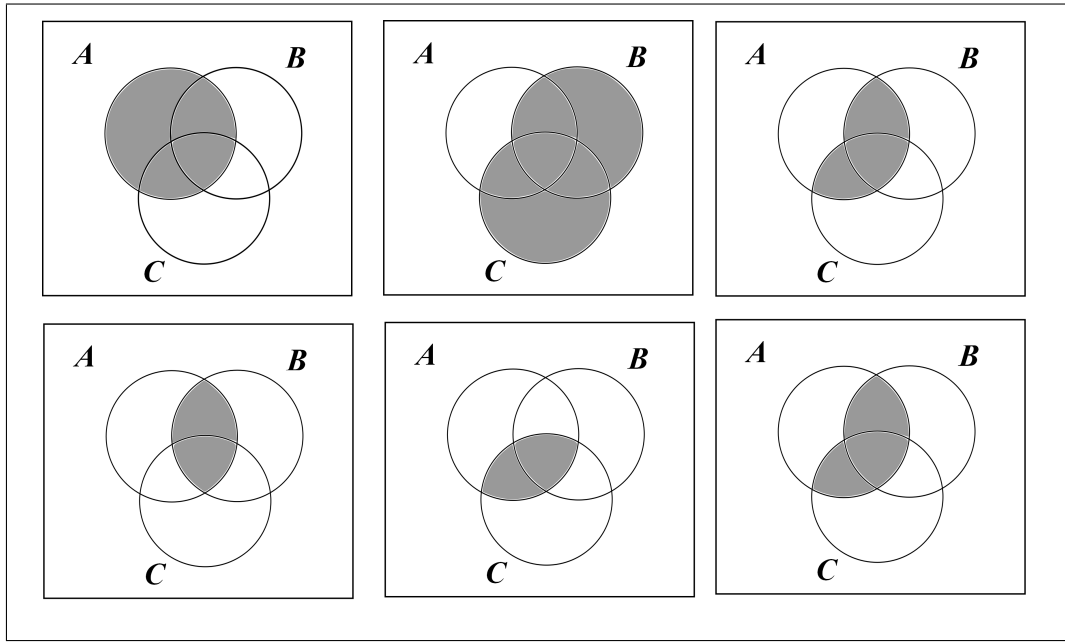


Figura 1.7 – Ilustração da propriedade distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

diagrama à direita, onde temos o evento $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Analisando os diagramas à direita nas duas linhas da figura, vemos que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A ilustração da segunda propriedade está na **Figura 1.8**. Na linha superior, ilustramos o lado esquerdo da igualdade $A \cup (B \cap C)$: no diagrama à esquerda temos o evento A e no diagrama do centro temos o evento $B \cap C$. Para sombrear a união desses dois eventos, basta sombrear todas as partes que estão sombreadas em algum dos diagramas, o que resulta no diagrama à direita, onde temos o evento $A \cup (B \cap C)$. Na linha inferior, ilustramos o lado direito da igualdade $(A \cup B) \cap (A \cup C)$: no diagrama à esquerda temos o evento $A \cup B$ e no diagrama do centro, o evento $A \cup C$. Para sombrear a interseção desses dois eventos, basta sombrear todas as partes que estão sombreadas em ambos os diagramas e isso resulta no diagrama à direita, onde temos o evento $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Analisando os diagramas à direita nas duas linhas da figura, vemos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8. Absorção

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \\ A \cup (A \cap B) &= A \end{aligned} \quad (1.15)$$

9. Leis de De Morgan

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Na primeira linha da **Figura 1.9** ilustra-se a primeira propriedade $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: no diagrama à esquerda temos $\overline{A \cap B}$; nos dois diagramas centrais, temos, respectivamente,

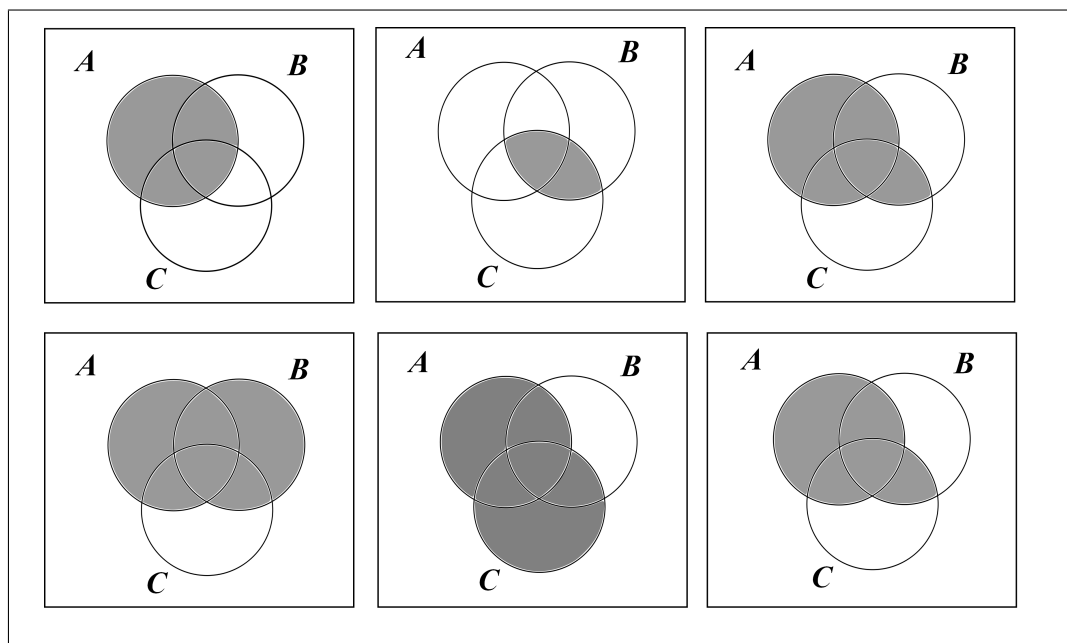


Figura 1.8 – Ilustração da propriedade distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\bar{A}$ e $\bar{B}$; no diagrama à direita, temos $\bar{A} \cup \bar{B}$, que é igual ao diagrama à esquerda, ou seja, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Na segunda linha da **Figura 1.9** ilustra-se a segunda propriedade $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$: no diagrama à esquerda temos $\overline{A \cup B}$; nos dois diagramas centrais, temos, respectivamente, $\bar{A}$ e $\bar{B}$; no diagrama à direita, temos $\bar{A} \cap \bar{B}$, que é igual ao diagrama à esquerda, ou seja, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

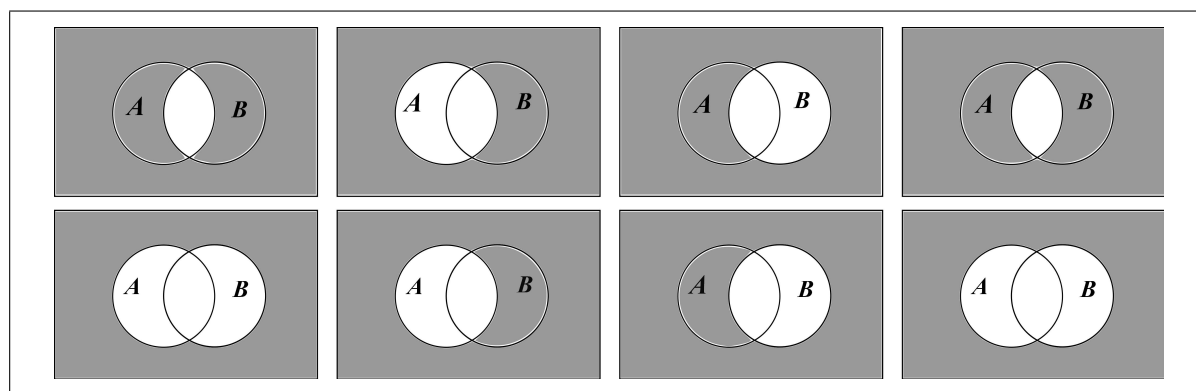


Figura 1.9 – Ilustração das leis de De Morgan

1.3.7 Princípio da Dualidade

Seja E uma equação da álgebra dos conjuntos. Por exemplo, $A \cup \emptyset = A$. O dual de E , denotado por E^* , é a equação obtida a partir de E substituindo-se cada ocorrência de $\cap, \cup, \Omega, \emptyset$ por $\cup, \cap, \emptyset, \Omega$, respectivamente. Por exemplo, o dual de $A \cup \emptyset = A$ é $A \cap \Omega = A$. O princípio da dualidade estabelece que, se uma equação E da álgebra dos conjuntos é verdadeira, então seu dual E^* também o é.

Note que as propriedades acima estão organizadas aos pares e em cada par uma equação é o dual da outra.

1.3.8 Diferença Simétrica

A diferença simétrica entre A e B , representada por $A \oplus B$ e ilustrada na **Figura 1.10**, é o evento formado pelos elementos do espaço amostral que pertencem à união, mas não à interseção de A e B , isto é:

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad (\text{ou exclusivo})$$

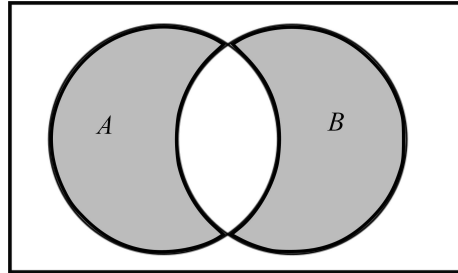


Figura 1.10 – Diferença simétrica de dois eventos A e B : $A \oplus B$

Note a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup \emptyset \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

Essa equivalência permite definir a diferença simétrica como $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, o que justifica o nome. Note que $A \oplus B$ é o conjunto dos elementos que pertencem a exatamente um dos eventos A e B .

São válidas as seguintes propriedades:

- $A \oplus A = \emptyset$

De fato:

$$A \oplus A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = A \cap \bar{A} = \emptyset$$

- $A \oplus \emptyset = A$

De fato:

$$A \oplus \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A \cap \bar{\emptyset} = A \cap \Omega = A$$

- Comutatividade: $A \oplus B = B \oplus A$

Segue direto da comutatividade da união e da interseção.

- Distributiva em relação à interseção: $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

De fato:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \oplus (A \cap C) &= [(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C})] \cup [(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B})] \\ &= [(A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})] \cup [(A \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})] \\ &= [(A \cap B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B \cap \bar{C})] \cup [(A \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})] \\ &= (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap \bar{B}) \\ &= A \cap [(B \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B})] \\ &= A \cap (B \oplus C) \end{aligned}$$

- Associatividade: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

De fato: desenvolvendo cada um dos membros da igualdade obtemos

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \oplus C &= [(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})] \oplus C \\ &= \{[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})] \cap \bar{C}\} \cup \{C \cap \overline{[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})]}\} \\ &= [(\bar{C} \cap B \cap \bar{A}) \cup (\bar{C} \cap A \cap \bar{B})] \cup \{C \cap [(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (\bar{B} \cap \bar{A})]\} \\ &= [(\bar{C} \cap B \cap \bar{A}) \cup (\bar{C} \cap A \cap \bar{B})] \cup \{C \cap [(\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A)]\} \\ &= [(\bar{C} \cap B \cap \bar{A}) \cup (\bar{C} \cap A \cap \bar{B})] \cup \{C \cap [(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap A) \cup (B \cap \bar{B}) \cup (B \cap A)]\} \\ &= [(\bar{C} \cap B \cap \bar{A}) \cup (\bar{C} \cap A \cap \bar{B})] \cup [(C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (C \cap B \cap A)] \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \oplus (B \oplus C) &= A \oplus [(B \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B})] \\ &= \{A \cap \overline{[(B \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B})]}\} \cup \{[(B \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B})] \cap \bar{A}\} \\ &= \{A \cap [(\bar{B} \cap \bar{C}) \cap (\bar{C} \cap \bar{B})]\} \cup [(\bar{A} \cap C \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})] \\ &= \{A \cap [(\bar{B} \cup C) \cap (\bar{C} \cup B)]\} \cup [(\bar{A} \cap C \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})] \\ &= \{A \cap [(\bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap B) \cup (C \cap \bar{C}) \cup (C \cap B)]\} \cup [(\bar{A} \cap C \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})] \\ &= [(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap B)] \cup [(\bar{A} \cap C \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})] \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \end{aligned}$$

- Lei do Cancelamento: $A \oplus B = A \oplus C \implies B = C$

Demonstração por absurdo

Suponhamos, por absurdo, que $B \neq C$. Então, pelo menos uma das duas situações ocorre:

$$\begin{aligned} \exists x \in B \mid x \notin C \\ \exists x \in C \mid x \notin B \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade (a demonstração é análoga), consideremos que a primeira situação ocorra, isto é, $(x \in B) \wedge (x \notin C)$. Suponhamos, por absurdo, que $x \in A$. Então teríamos $(x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)$.

$$\begin{aligned} (x \in A) \wedge (x \notin C) \Rightarrow x \in A \setminus C \subseteq A \oplus C = A \oplus B \Rightarrow x \in A \oplus B \\ (x \in A) \wedge (x \in B) \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \notin A \oplus B \end{aligned}$$

o que é absurdo. Então, temos que temos que ter $(x \in B) \wedge (x \notin C) \wedge (x \notin A)$. Mas

$$\begin{aligned} (x \in B) \wedge (x \notin A) \Rightarrow x \in (B \setminus A) \implies x \in A \oplus B \\ (x \notin C) \wedge (x \notin A) \Rightarrow x \notin A \oplus C = A \oplus B \Rightarrow x \notin A \oplus B \end{aligned}$$

o que é, novamente, um absurdo. Logo, $B = C$.

1.4 Somatórios

A notação de somatório é bastante útil na apresentação de fórmulas, pois ele resume de forma bastante compacta a operação de soma de várias parcelas. Para compreender as propriedades do somatório, basta lembrar as propriedades da adição.

Para desenvolver um somatório, temos que substituir o valor do índice em cada uma das parcelas e em seguida realizar a soma dessas parcelas. Por exemplo:

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

A expressão geral é

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{1.17}$$

Em termos mais gerais, temos as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + y_n) = \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i\end{aligned}\tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n kx_i &= kx_1 + kx_2 + \cdots + kx_n = \\ &= k(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \\ &= k \sum_{i=1}^n x_i\end{aligned}\tag{1.19}$$

$$\sum_{i=1}^n k = k + k + \cdots + k = nk\tag{1.20}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m y_j\tag{1.21}$$

Note os índices nessa última expressão: o índice do primeiro somatório é i e do segundo somatório é j e cada termo no somatório depende de apenas um índice. Por isso podemos “quebrar” em 2 somatórios. Para ver por que essa expressão é verdadeira, note que esse somatório duplo pode ser desdobrado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j &= x_1(y_1 + \cdots + y_m) + x_2(y_1 + \cdots + y_m) + \cdots + x_n(y_1 + \cdots + y_m) \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_m) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m y_j\end{aligned}$$

É importante salientar algumas diferenças:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2\tag{1.22}$$

uma vez que

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$$

Temos também que

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \neq \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right) \quad (1.23)$$

uma vez que

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

É importante que você entenda bem a diferença entre as expressões 1.21 e 1.23.

EXEMPLO 1.12

Calcule as seguintes quantidades para os dados abaixo:

$$\sum_{i=1}^6 x_i \quad \sum_{i=1}^6 f_i \quad \sum_{i=1}^6 f_i x_i \quad \sum_{i=1}^6 f_i x_i^2$$

i	1	2	3	4	5	6
f_i	3	5	9	10	2	1
x_i	10	11	15	19	21	26

Solução

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 10 + 11 + 15 + 19 + 21 + 26 = 102$$

$$\sum_{i=1}^6 f_i = 3 + 5 + 9 + 10 + 2 + 1 = 30$$

$$\sum_{i=1}^6 f_i x_i = 3 \times 10 + 5 \times 11 + 9 \times 15 + 10 \times 19 + 2 \times 21 + 1 \times 26 = 478$$

$$\sum_{i=1}^6 f_i x_i^2 = 3 \times 10^2 + 5 \times 11^2 + 9 \times 15^2 + 10 \times 19^2 + 2 \times 21^2 + 1 \times 26^2 = 8098$$



1.5 Produtórios

Assim como para somatórios, podemos representar de forma compacta o produto de vários termos. Usaremos, agora, a letra grega maiúscula pi, Π . Temos, então, que

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n \quad (1.24)$$

Todas as propriedades são resultantes das propriedades da operação de multiplicação.

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n x_i y_i &= (x_1 y_1) \times (x_2 y_2) \times \cdots \times (x_n y_n) \\ &= (x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n)(y_1 \times y_2 \times \cdots \times y_n) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left(\prod_{i=1}^n y_i \right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\prod_{i=1}^n k x_i = (k x_1) \times (k x_2) \times \cdots \times (k x_n) = k^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \quad (1.26)$$

$$\prod_{i=1}^n k = k \times k \times \cdots \times k = k^n \quad (1.27)$$

$$\prod_{i=1}^n x_i^k = x_1^k \times x_2^k \times \cdots \times x_n^k = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^k \quad (1.28)$$

1.6 Exercícios Resolvidos

1.1 *Sejam A, B, C três eventos de um espaço amostral. Exprima os eventos abaixo usando as operações união, interseção e complementação:*

- (a) *somente A ocorre;*
(b) *A, B e C ocorrem;*
(c) *pelo menos um ocorre;*
(d) *exatamente dois ocorrem.*

Solução:

- (a) O evento “Somente A ocorre” significa que A ocorre e B não ocorre e C não ocorre; em linguagem de conjunto:

$$\text{Somente A ocorre} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

- (b) O evento “A, B e C ocorrem” significa que os três eventos ocorrem; em linguagem de conjunto,

$$A, B \text{ e } C \text{ ocorrem} = A \cap B \cap C$$

- (c) O evento “pelo menos um ocorre” significa que pode ter ocorrido apenas um, ou dois ou três; essa é a própria definição de união, ou seja, em linguagem de conjunto, temos que

$$\text{pelo menos um ocorre} = A \cup B \cup C$$

- (d) Os dois que ocorrem podem ser A e B ou A e C ou B e C. Ocorrendo dois desses, o terceiro não pode ocorrer. Logo, em linguagem de conjunto temos que:

$$\text{exatamente dois ocorrem} = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$$

1.2 Considere o lançamento de dois dados e defina os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} A &= \text{soma par} \\ B &= \text{soma} \geq 9 \\ C &= \text{máximo das faces é 6} \end{aligned}$$

Calcule $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \cap C$, $B \setminus C$.

Solução:

$$A = \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \right. \\ \left. (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \right\}$$

$$B = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) \end{array} \right\}$$

$$A \cap B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \right. \\
&\quad \left. (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6), \right. \\
&\quad \left. (3, 6), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5) \right\} \\
A \setminus B &= A \cap \overline{B} = \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \right. \\
&\quad \left. (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (6, 2) \right\} \\
B \setminus A &= \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5)\} \\
B \cap C &= \{(3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \\
B \setminus C &= \{(4, 5), (5, 4), (5, 5)\}
\end{aligned}$$

Note que, de acordo com as propriedades já vistas,

$$\begin{aligned}
(B \cap C) \cup (B \setminus C) &= (B \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) = \\
&= [(B \cap C) \cup B] \cap [(B \cap C) \cup \overline{C}] = [B] \cap [\overline{C} \cup (B \cap C)] \\
&= B \cap [(\overline{C} \cup B) \cap (\overline{C} \cup C)] = B \cap [(\overline{C} \cup B) \cap (\Omega)] \\
&= B \cap (\overline{C} \cup B) = (B \cap \overline{C}) \cup (B \cap B) \\
&= (B \cap \overline{C}) \cup B = B
\end{aligned}$$

1.3 Prove que as seguintes afirmativas são verdadeiras:

- (a) $A \cap B \subseteq A$
- (b) $A \cap B \subseteq B$
- (c) $A \subseteq A \cup B$
- (d) $B \subseteq A \cup B$

Solução

(a) Seja $x \in A \cap B$. Por definição $x \in A$ e $x \in B$. Daí segue que

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$$

Ou seja, todo elemento de $A \cap B$ é elemento de A . Logo, $A \cap B \subseteq A$.

(b) Analogamente prova-se que $A \cap B \subseteq B$

(c) Se $x \in A$, então $x \in A \cup B$ pela definição de união. Logo,

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$$

ou seja, todo elemento de A é elemento de $A \cup B$. Logo, $A \subseteq A \cup B$.

(d) Analogamente prova-se que $B \subseteq A \cup B$

1.4 Prove que as seguintes afirmativas são equivalentes:

$$\begin{aligned}A &\subseteq B \\ A \cap B &= A \\ A \cup B &= B\end{aligned}$$

Solução - Parte 1: $A \subseteq B \equiv A \cap B = A$ ¹

1. $A \subseteq B \implies A \cap B = A$

Pelo Exercício 1.3 temos que $A \cap B \subseteq A$.

Seja $x \in A$. Como, por hipótese, $A \subseteq B$, resulta também que $x \in B$. Logo, $x \in A \implies x \in A \cap B$. Isso significa que $A \subseteq A \cap B$.

$$\left. \begin{aligned}A \cap B &\subseteq A \\ A &\subseteq A \cap B\end{aligned} \right\} \implies A = A \cap B$$

e isso completa a prova de que $A \subseteq B \implies A \cap B = A$

2. $A \cap B = A \implies A \subseteq B$

Seja $x \in A$. Como, por hipótese, $A \cap B = A$, resulta que $x \in A \cap B$, o que implica que $x \in B$. Logo, todo elemento de A é também elemento de B , ou seja, $A \subseteq B$.

$$\left. \begin{aligned}A \subseteq B &\implies A \cap B = A \\ A \cap B = A &\implies A \subseteq B\end{aligned} \right\} \implies A \cap B = A \equiv A \subseteq B$$

Solução - Parte 2: $A \subseteq B \equiv A \cup B = B$

1. $A \subseteq B \implies A \cup B = B$

Pelo Exercício 1.3, temos que $B \subseteq A \cup B$

Seja $x \in A \cup B$. Então, pelo menos uma das seguintes afirmativas é verdadeira:

$$\begin{aligned}x &\in B \\ x &\in A \cap B \subseteq B \implies x \in B && \text{(exercício 1.3)} \\ x &\in A \subseteq B \implies x \in B && \text{(por hipótese)}\end{aligned}$$

Resulta, então, que se $x \in A \cup B$, então $x \in B$, o que significa que $A \cup B \subseteq B$.

$$\left. \begin{aligned}A \cup B &\subseteq B \\ B &\subseteq A \cup B\end{aligned} \right\} \implies B = A \cup B$$

e isso completa a prova de que $A \subseteq B \implies A \cup B = B$

¹Lê-se o símbolo $\equiv$ como “é equivalente a”

$$2. A \cup B = B \implies A \subseteq B$$

Seja $x \in A$. Pelo Exercício 1.3, resulta que $x \in A \cup B = B$ por hipótese. Logo, $x \in A \implies x \in B$ o que significa que $A \subseteq B$.

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq B \implies A \cup B = B \\ A \cup B = B \implies A \subseteq B \end{array} \right\} \implies A \cup B = B \equiv A \subseteq B$$

3. Pela transitividade da equivalência, temos que

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B = A \equiv A \subseteq B \\ A \cup B = B \equiv A \subseteq B \end{array} \right\} \implies [A \cap B = A] \equiv [A \subseteq B] \equiv [A \cup B = B]$$

1.5 *Obtenha expressões alternativas para*

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (C \cup D) \\ (A \cap B) \cup (C \cap D) \end{aligned}$$

Solução

Aplicando as propriedades distributiva, comutativa e associativa, temos

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (C \cup D) &= [(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap D] \\ &= [C \cap (A \cup B)] \cup [D \cap (A \cup B)] \\ &= [(C \cap A) \cup (C \cap B)] \cup [(D \cap A) \cup (D \cap B)] \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) \end{aligned}$$

Pelo princípio da dualidade, resulta

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$$

1.6 *Prove que*

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$$

Solução

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) &= (A \cap A) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) \cup (B \cap \overline{B}) && \text{(Exercício 1.5)} \\ &= A \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) \cup \emptyset && \text{(Idempotência)} \\ &= [A \cup (A \cap \overline{B})] \cup (B \cap A) && \text{(Associativa)} \\ &= A \cup (B \cap A) && (A \cap \overline{B}) \subseteq A \\ &= A && (B \cap A \subseteq A) \end{aligned}$$

1.7 Exercícios Propostos

1.7 *Sejam A, B, C eventos em um espaço amostral Ω . Prove que se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.*

1.8 *Sejam A, B, C eventos em um espaço amostral Ω . Prove que*

1. $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

2. $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

3. $A \subseteq B \implies \overline{B} \subseteq \overline{A}$

4. $A \cap B = \emptyset$ e $C \subseteq A \implies B \cap C = \emptyset$

1.9 *Considere os diagramas na **Figura 1.11**.*

1. *No diagrama (1), assinale a área correspondente a $A \setminus B$.*

2. *No diagrama (2), assinale a área correspondente a $\overline{A} \cap \overline{B}$.*

3. *No diagrama (3), assinale a área correspondente a $(A \cup C) \cap B$.*

4. *No diagrama (4), assinale a área correspondente a $(A \cup B) \cap C$.*

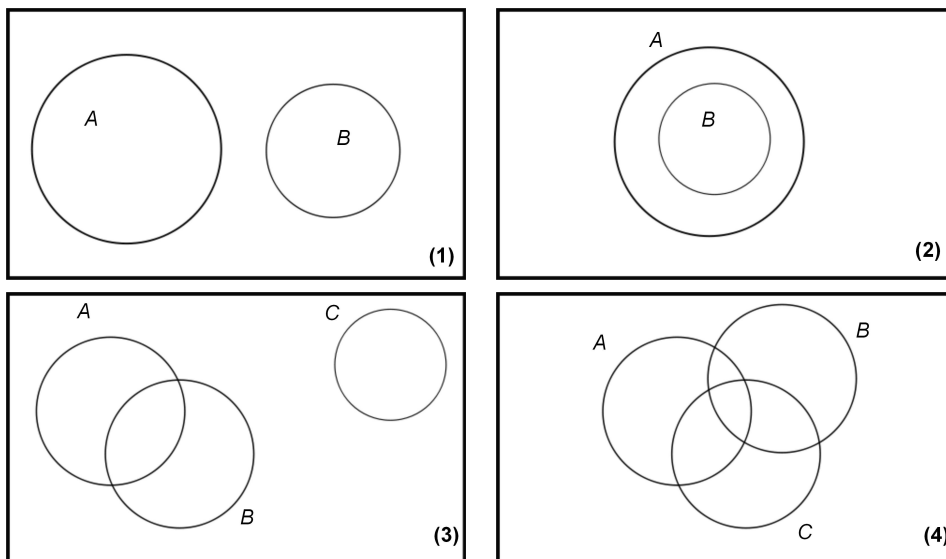


Figura 1.11 – Diagramas de Venn para o Exercício 1.9

1.10 *Prove que:*

1. $A \subseteq B \implies A \oplus B = B \setminus A$

2. $\overline{A} \oplus \overline{B} = A \oplus B$

1.11 Considere a **Figura 1.12**. Expresse, em notação de conjuntos, os eventos definidos por cada uma das áreas numeradas.

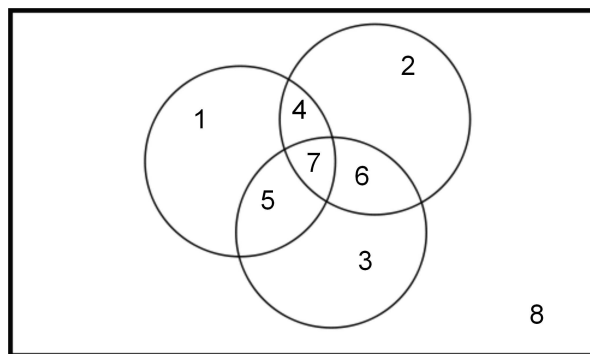


Figura 1.12 – Diagrama de Venn para o Exercício 1.11

1.12 Numa pesquisa com 60 pessoas, constatou-se que

25 leem O Globo	9 leem O Globo e O Dia
26 leem o JB	11 leem O Globo e o JB
26 leem O Dia	8 leem O Dia eo JB
3 leem os 3 jornais	

- (a) Represente as informações dadas em um diagrama de Venn, tendo o cuidado de definir os eventos.
- (b) Indique a qual evento corresponde cada uma das cardinalidades dadas.
- (c) Ache o número de pessoas que leem pelo menos um jornal.
- (d) Ache o número de pessoas que não leem qualquer um desses 3 jornais.
- (e) Ache o número de pessoas que leem exatamente um jornal.

1.13 Lançam-se três moedas. Enumere o espaço amostral e os eventos A = “faces iguais”; B = “cara na primeira moeda”; C = “coroa na segunda e terceira moedas”.

1.14 Defina um espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios:

- (a) Em uma pesquisa de mercado, conta-se o número de clientes do sexo masculino que entram em um supermercado no horário de 8 às 12 horas.

- (b) *Em um estudo de viabilidade de abertura de uma creche própria de uma grande empresa, fez-se um levantamento, por funcionário, do sexo dos filhos com menos de 5 anos de idade. O número máximo de filhos por funcionário é 4 e a informação relevante é o sexo dos filhos de cada funcionário.*
- (c) *Em um teste de controle de qualidade da produção, mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que queimem.*
- (d) *Um fichário com 10 nomes contém 3 nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha até o último nome de mulher ser selecionado e anota-se o número de fichas selecionadas.*
- (e) *Lança-se uma moeda até aparecer cara pela primeira vez e anota-se o número de lançamentos.*
- (f) *Em uma urna há 5 bolas identificadas pelas letras $\{A, B, C, D, E\}$. Sorteiam-se duas bolas, uma após a outra com reposição, e anota-se a configuração formada.*
- (g) *Mesmo enunciado anterior, mas as duas boas são selecionados simultaneamente.*
- (h) *Uma caixa contém uma bola azul, uma verde e uma vermelha. Retira-se uma bola ao acaso da urna. Depois de registrada sua cor, ela é substituída por uma bola vermelha. O experimento termina quando uma bola vermelha é retirada..*
- (i) *Pacientes que chegam a um hospital são classificados de acordo com o sexo e com o fato de terem ou não plano de saúde. Considere o experimento aleatório que consiste na classificação de um paciente que chega ao pronto socorro.*

1.15 *Sejam A, B, C três eventos de um espaço amostral. Exprima os eventos abaixo em notação de conjunto utilizando as operações apropriadas:*

- (a) *exatamente um ocorre;*
- (b) *nenhum ocorre;*
- (c) *pelo menos dois ocorrem;*
- (d) *no máximo dois ocorrem.*

1.16 *Suponha que todo passageiro que chega ao balcão de embarque de uma companhia aérea seja classificado como brasileiro (B) ou estrangeiro (E) e pelo número de malas despachadas (suponha que cinco é o máximo).*

- (a) *Ache o espaço amostral Ω para esse experimento.*
- (b) *Descreva os seguintes eventos em palavras.*

(i) $A = \{B0, E0\}$

(ii) $B = \{E0, E1, E2, E3, E4, E5\}$

$$(iii) C = \{B1, E1, B2, E2\}$$

$$(iv) D = \{B1, E1, B3, E3, B5, E5\}$$

1.17 *Uma cafeteria oferece chá nas seguintes variações: quente ou frio; com ou sem creme; e em tamanhos pequeno ou grande. Um experimento consiste em registrar essas três opções para o próximo cliente.*

(a) *Represente o espaço amostral desse experimento através de um diagrama de árvore, definindo claramente os eventos.*

(b) *Considere os seguintes eventos.*

A_1 = *O próximo cliente pede tamanho pequeno*

A_2 = *O próximo cliente pede chá frio*

A_3 = *O próximo cliente pede tamanho pequeno ou frio*

Liste os resultados em cada um dos seguintes eventos:

(i) $A_2 \cup A_3$

(ii) $A_2 \cap A_3$

Capítulo 2

Princípio da Indução Matemática

2.1 Conceitos básicos

Neste capítulo, estudaremos o princípio da indução matemática, que é uma importante ferramenta para demonstração da veracidade de sentenças abertas definidas no conjunto dos números naturais.

DEFINIÇÃO Sentença aberta definida em $\mathbb{N}$

Uma sentença aberta definida em $\mathbb{N}$ é uma sentença matemática $P(n)$ que depende de uma variável natural n , podendo ser falsa ou verdadeira quando se substitui n por um número natural qualquer.

Alguns exemplos de sentenças abertas em $\mathbb{N}$ são:

- $P(n) : 2n$ é um número ímpar $\forall n \in \mathbb{N}$ – note que $P(n)$ é sempre falsa.
- Por outro lado, $P(n) : 2n$ é um número par é verdadeira para $\forall n \in \mathbb{N}$
- $P(n) : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ – se calcularmos $P(1), P(2), P(3)$ veremos que elas são verdadeiras.

A questão que se coloca é: como demonstrar que uma sentença aberta é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$? Precisamos da seguinte definição.

DEFINIÇÃO Conjunto verdade

Dada uma sentença aberta em $\mathbb{N}$, seu conjunto verdade é um subconjunto V definido como

$$V = \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ é verdadeira}\}$$

Vamos enunciar, agora, o princípio da indução matemática.

! Princípio da indução matemática

Dado um subconjunto S do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ tal que

1. $1 \in S$ e
2. $n \in S \implies n + 1 \in S$

então $S = \mathbb{N}$.

Dito de outra forma, o único subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisfaz as condições (1) e (2) acima é o próprio $\mathbb{N}$. Assim, para demonstrar, por indução, que uma sentença aberta $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, basta mostrar que seu conjunto verdade V satisfaz a essas condições, o que implicará que $V = \mathbb{N}$.

! Prova por indução matemática

Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Se

1. $P(1)$ é verdadeira e
 2. para qualquer $n \in \mathbb{N}$, sempre que $P(n)$ for verdadeira, $P(n + 1)$ também o será,
- então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que a hipótese (1) é equivalente a dizer que $1 \in V$ e a hipótese (2) é equivalente a $n \in V \implies n + 1 \in V$. Pelo princípio da indução matemática, resulta que $V = \mathbb{N}$.

É possível generalizar o teorema anterior para casos em que determinada propriedade seja válida apenas para inteiros maiores que determinado valor a . Por exemplo, a propriedade $2^n > n^2$ é válida apenas para $n \geq 5$. (Verifique que ela não é válida para $n \leq 4$.)

! Prova por indução matemática - Caso geral

Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$ e seja $a \in \mathbb{N}$ qualquer. Se

1. $P(a)$ é verdadeira e
2. para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq a$, sempre que $P(n)$ for verdadeira, $P(n + 1)$ também o será,

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Antes de passarmos aos exemplo, iremos apresentar uma segunda versão do teorema.

! Indução completa

Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$ e seja $a \in \mathbb{N}$ qualquer. Se

1. $P(a)$ é verdadeira e
2. para qualquer $n \geq a$, $P(i)$ for verdadeira para $a \leq i \leq n$, $P(n + 1)$ também o será,

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Note a diferença, conforme ilustrado na **Figura 2.1**: na indução completa, a veracidade de $P(n + 1)$ depende da veracidade da afirmativa para todos os naturais anteriores, e não apenas do natural imediatamente anterior. Essa versão será útil em demonstrações de propriedades definidas recursivamente em que o n -ésimo termo depende de dois ou mais termos anteriores.

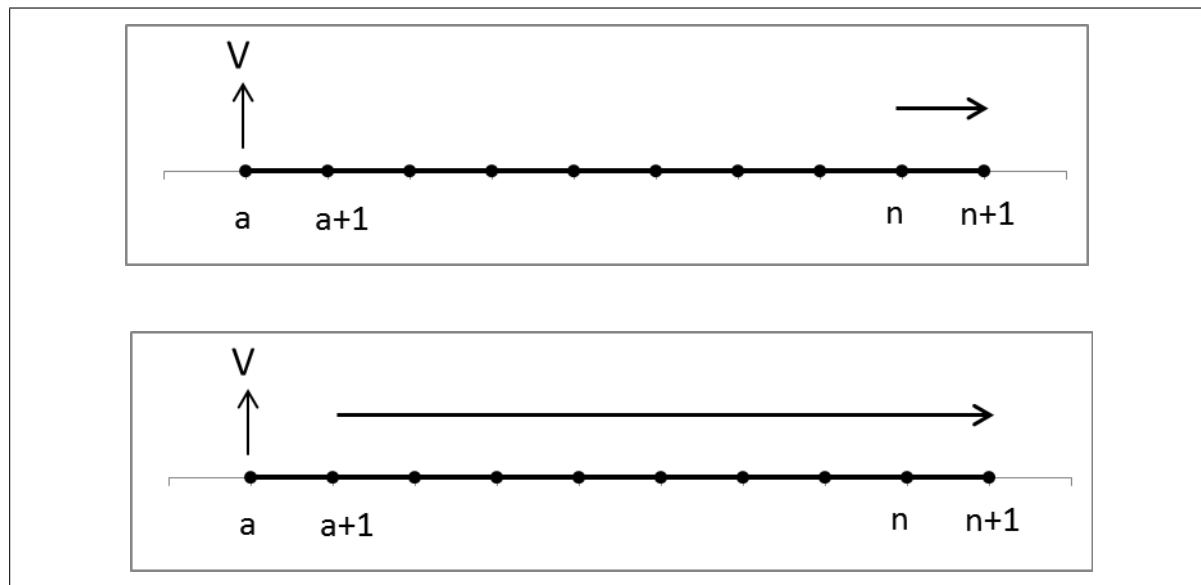


Figura 2.1 – Ilustração dos teoremas sobre indução matemática

2.2 Exemplos

2.2.1 Soma dos n primeiros números naturais

Vamos denotar por S_n a soma dos n primeiros números naturais, ou seja,

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

Seguindo o artifício usado por Gauss, note que podemos escrever S_n de duas formas equivalentes, já que a adição é comutativa.

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + \cdots + n \\ S_n &= n + (n-1) + \cdots + 1 \end{aligned}$$

Somando termo a termo, obtemos

$$\begin{array}{rcccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) \end{array}$$

o que resulta em

$$2S_n = n(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Embora esse seja um argumento bastante interessante, não constitui uma prova formal de que

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2.1)$$

Vamos demonstrar essa igualdade por indução, ou seja, vamos provar por indução que a sentença

$$P(n) : S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

é verdadeira.

Passo 1: Vamos provar que $P(1)$ é verdadeira.

$$\text{De fato: } S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Passo 2: Supondo $P(n)$ verdadeira, vamos provar que $P(n+1)$ também o é.

$$\text{Hipótese de indução (HI): } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Tese: } S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dem:

$$S_{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = S_n + (n+1)$$

Usando a hipótese de indução, resulta

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

o que completa demonstração. ■

2.2.2 Soma dos produtos de dois naturais consecutivos

Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (2.2)$$

$$\text{Nossa sentença é } P(n) : \sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Vamos provar que ela é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Passo 1: Vamos provar que $P(1)$ é verdadeira.

$$\text{De fato: } \sum_{i=1}^1 i(i+1) = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}.$$

Passo 2: Supondo $P(n)$ verdadeira, vamos provar que $P(n+1)$ também o é.

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\text{Tese: } \sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

De fato:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) &= \sum_{i=1}^n i(i+1) + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \end{aligned}$$

o que completa demonstração. ■

2.2.3 Soma dos quadrados dos n primeiros números naturais

Vamos usar os resultados (2.1) e (2.2) para obter a expressão para $\sum_{i=1}^n i^2$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i(i+1) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \sum_{i=1}^n i \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6} \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2.4 Soma dos n primeiros ímpares positivos

Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nossa sentença é

$$P(n) : \quad \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

Vamos provar que ela é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Passo 1: Vamos provar que $P(1)$ é verdadeira.

$$\text{De fato: } \sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 1 = 1^2.$$

Passo 2: Supondo $P(n)$ verdadeira, vamos provar que $P(n + 1)$ também o é.

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

$$\text{Tese: } \sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = (n + 1)^2$$

De fato:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = \sum_{i=1}^n (2i - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

o que completa a prova. ■

2.2.5 Soma dos cubos de três números naturais consecutivos

Vamos provar que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 9. Nossa sentença, então, é:

$$P_n : \quad n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 = 9 \cdot k$$

Vamos provar que ela é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Passo 1: Vamos provar que $P(1)$ é verdadeira.

$$\text{De fato: } 1^3 + (1 + 1)^3 + (1 + 2)^3 = 36 = 9 \cdot 4.$$

Passo 2: Supondo $P(n)$ verdadeira, vamos provar que $P(n + 1)$ também o é.

$$\text{HI: } n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9 \cdot k$$

$$\text{Tese: } (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = 9 \cdot k'$$

De fato:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 + n^3 - n^3 \\&= [n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3] + (n+3)^3 - n^3 \\&= 9 \cdot k + (n+3)^3 - n^3 \\&= 9 \cdot k + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 - n^3 \\&= 9(k + n^2 + 3n + 3) \\&= 9k'\end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

2.3 Definição por recorrência

Define-se uma expressão E_n , por recorrência, para todo número natural n em duas etapas: (i) define-se claramente E_1 e (ii) estabelece-se uma forma de se obter E_{n+1} a partir de E_n . Pelo princípio da indução matemática, resulta que, com esse procedimento, E_n fica definida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Quando estudamos a soma dos n primeiros números naturais, definimos:

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

Podemos definir essa soma por recorrência, o que nos libera do uso dos três pontinhos $\cdots$, recurso intuitivo, mas pouco formal. Para isso, fazemos:

- $S_1 = 1$
- $S_n = S_{(n-1)} + n \quad \forall n \geq 2$

Este exemplo ilustra um outro conceito importante, que será bastante útil. Note que, a cada $n \in \mathbb{N}$, associamos um número S_n , ou seja, definimos uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Essa é a definição de *sequência*.

DEFINIÇÃO Sequência

Uma sequência a em um conjunto A é uma função definida em $\mathbb{N}$ e tomando valores em A , ou seja, é uma função

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\longrightarrow A \\ n &\longmapsto a(n) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nosso interesse aqui se reduzirá ao caso em que A é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Sabemos que uma função fica determinada quando se tem a imagem de todos os elementos de seu domínio. Assim, uma sequência fica determinada quando se especifica a imagem de todos os naturais. Vamos indicar uma sequência a por

$$a(1), a(2), \dots, a(n), \dots \tag{2.5}$$

ou ainda por

$$a(n) : a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \tag{2.6}$$

EXEMPLO 2.1 *Soma dos n primeiros termos de uma sequência*

A soma dos n primeiros termos de uma sequência pode ser definida recursivamente como:

- $S_1 = a_1$
- $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

**EXEMPLO 2.2** *Fatorial*

Podemos definir o fatorial recursivamente como:

- $1! = 1$
- $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

**EXEMPLO 2.3** *Potências naturais de um número real a*

Dado um número real qualquer a , podemos definir a potência a^n em que $n \in \mathbb{N}$ recursivamente como

- $a^1 = a$
- $a^{n+1} = a^n \cdot a$

Podemos provar, por indução, as propriedades das potências. Sejam a e b números reais quaisquer e $m, n \in \mathbb{N}$.

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Dem: Vamos fixar m e fazer indução sobre n .

- $P(1) : a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}$
- Suponhamos $P(n)$ verdadeira, isto é, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e vamos provar que $P(n+1)$ também o é. De fato:

$$P(n+1) : a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot a^n \cdot a = (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^{m+n} \cdot a = a^{m+n+1}$$

No primeiro sinal de igualdade, usamos o fato de $P(1)$ ser verdadeira. Para resolver o termo entre parênteses, usamos a hipótese de indução e, finalmente, usamos a definição. ■

- $(a^m)^n = a^{mn}$

Dem: Vamos fixar m e fazer indução sobre n .

- $P(1) : (a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}$ – aqui usamos a definição
- Suponhamos $P(n)$ verdadeira, isto é, $(a^m)^n = a^{mn}$ e vamos provar que $P(n+1)$ também o é. De fato:

$$P(n+1) : (a^m)^{n+1} = (a^m)^n \cdot (a^m) = a^{mn} \cdot a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}$$

No primeiro sinal de igualdade, usamos a propriedade anterior e no segundo sinal de igualdade, usamos a hipótese de indução e, finalmente, usamos, mais uma vez, a propriedade anterior. ■

- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Dem: Vamos fazer indução sobre n .

- $P(1) : (a \cdot b)^1 = a \cdot b = a^1 \cdot b^1$ – aqui usamos a definição

- Suponhamos $P(n)$ verdadeira, isto é, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ e vamos provar que $P(n+1)$ também o é. De fato:

$$P(n+1) : (a \cdot b)^{n+1} = (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b)^1 = a^n \cdot b^n \cdot a \cdot b = (a^n \cdot a) \cdot (b^n \cdot b) = a^{n+1} \cdot b^{n+1}$$

No primeiro sinal de igualdade, usamos a propriedade anterior e no segundo sinal de igualdade, usamos a hipótese de indução e, finalmente, usamos, mais uma vez, a propriedade anterior, depois de reorganizar as parcelas. ■

EXEMPLO 2.4 Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci é uma sequência $F(n)$ definida recursivamente como:

$$\begin{aligned} F_1 = F_2 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \end{aligned}$$

Os primeiros valores de tal sequência são 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Vamos estudar, agora, a soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci. Para isso, vamos listar algumas dessas somas:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 & S_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 & S_2 &= S_1 + F_2 = 2 \\ F_3 &= 2 & S_3 &= S_2 + F_3 = 4 \\ F_4 &= 3 & S_4 &= S_3 + F_4 = 7 \\ F_5 &= 5 & S_5 &= S_4 + F_5 = 12 \\ F_6 &= 8 & S_6 &= S_5 + F_6 = 17 \\ F_7 &= 13 \\ &\dots \end{aligned}$$

Note o seguinte:

$$\begin{aligned} S_1 + 1 &= F_3 \\ S_2 + 1 &= F_4 \\ S_3 + 1 &= F_5 \\ S_4 + 1 &= F_6 \\ S_5 + 1 &= F_7 \\ &\dots \end{aligned}$$

Você irá provar, no Exercício 2.4, o seguinte resultado:

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1 \tag{2.7}$$

Embora a sequência de Fibonacci seja formada apenas por números naturais, a forma fechada para o termo geral da sequência envolve números irracionais. Você irá provar, no Exercício 2.5, o seguinte resultado:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (2.8)$$

EXEMPLO 2.5 *Progressões aritméticas***DEFINIÇÃO** Progressão aritmética

Uma progressão aritmética (p.a.) de razão r é uma sequência de números $a(n)$ tal que cada termo a partir do segundo é igual ao anterior somado de r . Mais precisamente,

- é dado o primeiro termo a_1 ;
- para $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + r$

Vamos desenvolver os primeiros termos de uma p.a. para ver se conseguimos estabelecer uma fórmula fechada para o termo geral da progressão.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r \end{aligned}$$

Com esses termos iniciais, podemos antecipar a forma fechada do termo geral de uma p.a. de razão r :

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \quad (2.9)$$

Vamos provar, por indução, que essa fórmula está correta.

- $P(1)$ é verdadeira, pois $a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r$.
- Vamos supor $P(n)$ verdadeira, ou seja, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ e vamos provar que $P(n + 1)$ também é verdadeira. De fato:

$$a_{n+1} = a_n + r = [a_1 + (n - 1) \cdot r] + r = a_1 + n \cdot r$$



Considere os n primeiros termos de uma p.a. e tome a soma de dois termos equidistantes de cada um dos extremos.

$$\begin{aligned}a_1 + a_n &= a_1 + a_{n+1-1} \\a_2 + a_{n-1} &= a_2 + a_{n+1-2} \\a_3 + a_{n-2} &= a_3 + a_{n+1-3} \\&\dots \\a_i + a_{n-(i-1)} &= a_i + a_{n+1-i}\end{aligned}$$

Todas essas somas são iguais:

$$\begin{aligned}a_i + a_{n+1-i} &= [a_1 + (i-1) \cdot r] + [a_1 + (n+1-i-1) \cdot r] \\&= a_1 + a_1 + [(i-1) + (n-i)] \cdot r\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$= a_1 + [a_1 + (n-1) \cdot r] = a_1 + a_n\tag{2.11}$$

Vamos usar este resultado para determinar a soma dos n primeiros termos de uma p.a. de razão r . Vamos denotar por S_n essa soma, ou seja,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n\tag{2.12}$$

Note que podemos escrever:

$$\begin{array}{rcccccccc}S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & \dots & + & a_{n-1} & + & a_n \\S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & \dots & + & a_2 & + & a_1 \\ \hline 2S_n & = & (a_1 + a_n) & + & (a_2 + a_{n-1}) & + & \dots & + & (a_{n-1} + a_2) & + & (a_n + a_1)\end{array}$$

Usando o resultado (2.11), obtemos que

$$\begin{aligned}2S_n &= n \cdot (a_1 + a_n) \implies \\S_n &= \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}\end{aligned}\tag{2.13}$$

Como no caso da soma dos n primeiros números naturais, esse artifício não consiste em uma prova formal. Vamos demonstrar, por indução, que a soma dos n primeiros termos de uma p.a. de razão r é dada por 2.13.

- $P(1)$ é verdadeira, pois $S_1 = a_1 = \frac{1 \cdot (a_1 + a_1)}{2}$

- Vamos supor $P(n)$ verdadeira e provar que $P(n+1)$ também o é.

$$\text{HI: } S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$\text{Tese: } S_{n+1} = \frac{(n+1) \cdot (a_1 + a_{n+1})}{2}$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} + a_{n+1} \\ &= \frac{na_1 + na_n + 2a_{n+1}}{2} = \frac{na_1 + na_n + a_{n+1} + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{na_1 + na_n + a_1 + n \cdot r + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{(n+1)a_1 + na_n + n \cdot r + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{(n+1)a_1 + n \cdot (a_n + r) + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{(n+1)a_1 + n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{(n+1)a_1 + (n+1)a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2} \end{aligned}$$

e isso completa a prova. ■

EXEMPLO 2.6 *Progressões geométricas*

DEFINIÇÃO Progressão geométrica

Uma progressão geométrica (p.g.) de razão q é uma sequência de números $a(n)$ tal que cada termo a partir do segundo é igual ao anterior multiplicado por q . Mais precisamente,

- é dado o primeiro termo a_1 ;
- para $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} \cdot q$

Vamos desenvolver os primeiros termos de uma p.g. para ver se conseguimos estabelecer uma fórmula fechada para o termo geral da progressão.

- $P(1)$ é verdadeira, pois $S_1 = a_1 = \frac{qa_1 - a_1}{q - 1} = \frac{(q - 1)a_1}{q - 1}$
- Vamos supor $P(n)$ verdadeira e provar que $P(n + 1)$ também o é.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} = \frac{qa_n - a_1}{q - 1} + a_{n+1} \\ &= \frac{qa_n - a_1 + qa_{n+1} - a_{n+1}}{q - 1} \\ &= \frac{(qa_{n+1} - a_1) + (qa_n - a_{n+1})}{q - 1} \\ &= \frac{(qa_{n+1} - a_1) + (qa_n - qa_n)}{q - 1} \\ &= \frac{(qa_{n+1} - a_1)}{q - 1} \end{aligned}$$

o que prova que $P(n + 1)$ é verdadeira. ■

2.4 Exercícios propostos

2.1 Prove, por indução, a validade das seguintes fórmulas:

$$(a) \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$$

$$(b) \sum_{i=1}^n (2i - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$$

$$(c) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$$

$$(d) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)} = \frac{n}{3n + 1}$$

2.2 Prove, por indução, a validade das seguintes fórmulas:

$$(a) \sum_{i=1}^n i \cdot 2^{i-1} = 1 + (n - 1) \cdot 2^n$$

$$(b) \prod_{i=2}^n \left(1 + \frac{1}{i - 1} \right)^{i-1} = \frac{n^{n-1}}{(n - 1)!}$$

(c) $n! > 2^n$, se $n \geq 4$

2.3 Uma progressão aritmético-geométrica é uma sequência (a_n) tal que a_1 , q e r são números reais dados com $q \neq 1$, e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$a_{n+1} = qa_n + r$$

Note que tal sequência é uma “mistura” de uma p.a. e uma p.g..

(a) A partir dos primeiros termos de tal sequência, deduza a forma fechada para o termo geral a_n . Prove, por indução, que essa fórmula é válida.

(b) Se S_n é a soma dos n primeiros termos, prove que

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + r \frac{q^n - 1}{(q - 1)^2} + r \frac{n}{1 - q} \quad (2.17)$$

2.4 Prove o resultado (2.7) referente à soma dos n primeiros números de Fibonacci.

2.5 Prove o resultado (2.8) referente ao termo geral da sequência de Fibonacci.

Dica: $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2$

Capítulo 3

Análise combinatória

Neste capítulo iremos trabalhar com espaços amostrais finitos. Veremos, então, diversas técnicas de contagem do número de elementos de eventos desses espaços amostrais. Dado um evento qualquer A , representaremos por $n(A)$ o número de elementos de A .

3.1 Princípio Fundamental da Adição

Sejam A e B eventos aleatórios de um espaço amostral Ω finito.

Se A e B são mutuamente exclusivos, então

$$A \cap B = \emptyset \implies n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad (3.1)$$

A definição de eventos mutuamente exclusivos se generaliza para mais de dois eventos. Neste caso, devemos analisar a interseção de dois eventos de cada vez. Mais precisamente, dada uma coleção de eventos $A_1, A_2, \dots, A_k$ de um espaço amostral Ω , dizemos que eles são mutuamente exclusivos dois a dois se $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$. Veja a **Figura 3.1**.

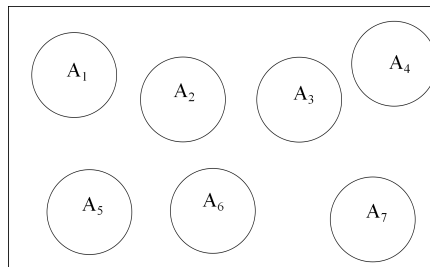


Figura 3.1 – Eventos mutuamente exclusivos dois a dois

Neste caso, a cardinalidade da união é dada pelo *princípio fundamental da adição*.

! Princípio Fundamental da Adição

Consideremos uma coleção de eventos mutuamente exclusivos dois a dois, tais que $n(A_i) = n_i$, $i = 1, \dots, k$. O princípio fundamental da adição estabelece que

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \implies n\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k n(A_i) = n_1 + \dots + n_k \quad (3.2)$$

A seguir apresentamos alguns resultados, que são consequências diretas do princípio fundamental da adição.

Como $A \cup \bar{A} = \Omega$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$, resulta que

$$n(\Omega) = n(A) + n(\bar{A}) \implies n(\bar{A}) = n(\Omega) - n(A) \quad (3.3)$$

Pelo resultado (1.6), $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ e $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$; resulta, então, que

$$n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) \implies n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B) \quad (3.4)$$

Analogamente,

$$n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B) \quad (3.5)$$

Consideremos o caso geral em que A e B são eventos aleatórios quaisquer. Podemos escrever

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$

Como A e $B \setminus A$ são disjuntos, resulta que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B \setminus A)$$

Usando o resultado (3.5), resulta que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (3.6)$$

EXEMPLO 3.1 Cardinalidade da união de 3 eventos finitos

Obtenha uma expressão para $n(A \cup B \cup C)$, onde A, B, C são eventos aleatórios com número finito de elementos.

Solução

$$\begin{aligned}n(A \cup B \cup C) &= n[(A \cup B) \cup C] \\&= n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C] \\&= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\&= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap C \cap B \cap C) \implies \\n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap C \cap B \cap C)\end{aligned}$$



3.2 Princípio Fundamental da Multiplicação

Para ilustrar o segundo princípio fundamental da contagem, considere o experimento aleatório que consiste no sorteio aleatório de um homem e uma mulher de um grupo de pessoas formado por três homens (h_1, h_2, h_3) e cinco mulheres $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$. Qual é a cardinalidade do espaço amostral deste experimento, ou seja, quantos casais podem ser formados com essas pessoas?

O espaço amostral é

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} h_1m_1, h_1m_2, h_1m_3, h_1m_4, h_1m_5, \\ h_2m_1, h_2m_2, h_2m_3, h_2m_4, h_2m_5, \\ h_3m_1, h_3m_2, h_3m_3, h_3m_4, h_3m_5, \end{array} \right\}$$

Mas se estamos interessados apenas no número de elementos de Ω , devemos notar que há cinco casais nos quais o homem é h_1 , cinco nos quais o homem é h_2 e outros cinco nos quais o homem é h_3 , perfazendo um total de $3 \times 5 = 15$ casais. Esse exemplo ilustra o *princípio fundamental da multiplicação*.

**Princípio Fundamental da Multiplicação**

Se temos k decisões $d_1, d_2, \dots, d_k$ que podem ser tomadas de $n_1, n_2, \dots, n_k$ maneiras respectivamente, então o número de maneiras de tomar as decisões d_1 e d_2 e $\dots$ e d_k é $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$.

Note que o princípio da multiplicação permite obter o número de elementos do espaço amostral formado pelos casais sem ter que fazer essa enumeração enfadonha! Imagine se fossem 100 homens e 200 mulheres!

EXEMPLO 3.2 *Números naturais de três algarismos distintos*

Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?

Solução

Para o primeiro algarismo (milhar), existem nove possibilidades, já que o zero não pode ocupar a primeira posição. Para a segunda posição, escolhida a primeira, sobram nove algarismos (agora já podemos considerar o zero) e para a terceira, escolhidos os dois primeiros, sobram oito algarismos. Logo, existem $9 \times 9 \times 8 = 648$ números. (Já pensou o trabalho que seria listar todos eles?)

**EXEMPLO 3.3** *Portas de um prédio*

Um prédio possui oito portas. De quantas maneiras posso entrar e sair desse prédio, se não quero usar na saída a mesma porta que usei na entrada?

Solução

Para a entrada, posso escolher qualquer uma das oito portas. Escolhida a porta de entrada, sobram sete portas para a saída. Logo, existem $8 \times 7 = 56$ maneiras de entrar e sair por portas diferentes.

**EXEMPLO 3.4** *Números pares de três algarismos distintos*

Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Solução

Para que o número seja par, ele tem que terminar com 2, 4 ou 6. Seja, então, P o evento de interesse. Vamos denotar por A_2 o evento “número par que termina com 2” e de maneira análoga, definimos os eventos A_4 e A_6 . Resulta que A_2 , A_4 e A_6 são mutuamente exclusivos dois a dois e $P = A_2 \cup A_4 \cup A_6$. Pelo princípio da adição, resulta que $n(P) = n(A_2) + n(A_4) + n(A_6)$.

Para calcular $n(A_2)$, note que o último algarismo é 2 e sobram duas posições para serem preenchidas com algarismos distintos escolhidos entre 1, 3, 4, 5, 6. Para a primeira posição, temos cinco possibilidades; escolhida a primeira posição, sobram quatro para a segunda posição. Pelo princípio fundamental da multiplicação existem $5 \times 4 = 20$ números pares com três algarismos distintos terminando com 2, ou seja, $n(A_2) = 20$. Analogamente, $n(A_4) = 20$ e $n(A_6) = 20$, o que implica que $n(P) = 20 + 20 + 20 = 60$.



3.3 Permutações

Consideremos quatro objetos distintos a_1, a_2, a_3, a_4 . De quantas maneiras podemos ordená-los? Vamos listar todas as possibilidades.

$a_1a_2a_3a_4$	$a_1a_2a_4a_3$	$a_1a_3a_2a_4$	$a_1a_3a_4a_2$
$a_1a_4a_2a_3$	$a_1a_4a_3a_2$	$a_2a_1a_3a_4$	$a_2a_1a_4a_3$
$a_2a_3a_1a_4$	$a_2a_3a_4a_1$	$a_2a_4a_1a_3$	$a_2a_4a_3a_1$
$a_3a_1a_2a_4$	$a_3a_1a_4a_2$	$a_3a_2a_1a_4$	$a_3a_2a_4a_1$
$a_3a_4a_1a_2$	$a_3a_4a_2a_1$	$a_4a_1a_2a_3$	$a_4a_1a_3a_2$
$a_4a_2a_1a_3$	$a_4a_2a_3a_1$	$a_4a_3a_1a_2$	$a_4a_3a_2a_1$

Cada uma dessas ordenações é chamada uma *permutação simples*. Podemos ver que o número de tais permutações é bem grande. Note que, para apenas quatro objetos, temos 24 permutações. O cálculo do número de permutações é uma consequência direta do princípio da multiplicação.

Consideremos, então, n objetos distintos $a_1, a_2, \dots, a_n$. Para a primeira posição, temos n possibilidades. Para a segunda, escolhida a primeira, sobram $n - 1$ objetos. Para a terceira, escolhidas a primeira e a segunda posições, sobram $n - 2$ objetos. Continuando, para a última posição, escolhidas as $n - 1$ anteriores, sobra apenas 1 objeto.

Pelo princípio da multiplicação, o número total de permutações, que denotaremos por P_n é $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$, e esse número, por definição, é o fatorial de n . Temos, assim, o seguinte resultado.



Permutações simples

Dados n objetos distintos, o número de **permutações simples** de tais objetos é dado por

$$P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = n! \quad (3.7)$$

EXEMPLO 3.5 Filas

Quantas filas diferentes podemos formar com cinco crianças?

Solução

Essa é exatamente a definição de permutação. Logo, o número de filas é $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.



EXEMPLO 3.6 *Livros numa estante*

Temos cinco livros de Estatística, três livros de Matemática Financeira e quatro livros de Contabilidade. De quantas maneiras podemos organizar esses livros em uma prateleira? Qual seria a sua resposta se os livros do mesmo assunto tivessem que ficar juntos?

Solução

Ao todo, há 12 livros; logo, se não é necessário agrupar por assunto, existem $12! = 479.001.600$ maneiras de organizar os livros.

Se os livros do mesmo assunto têm que ficar juntos, devemos observar que, primeiro, temos que contar as maneiras como podemos organizar os assuntos. Como são três assuntos, há $3! = 6$ maneiras de organizar os assuntos. Para os livros de Estatística, há $5! = 120$ maneiras de organizá-los; para os livros de Matemática Financeira, $3! = 6$ maneiras, e para os livros de Contabilidade, $4! = 24$ maneiras.

Pelo princípio fundamental da multiplicação, o número total de maneiras de organizar os 12 livros de modo que os livros do mesmo assunto fiquem juntos é $6 \times 6 \times 120 \times 24 = 103.680$ maneiras. Note que é razoável que esse número seja menor, pois estamos impondo condições restritivas na organização.

**EXEMPLO 3.7** *Assentos num banco*

Cinco moças e cinco rapazes têm que se sentar em cinco bancos de dois lugares, de modo que em cada banco fique uma moça e um rapaz. De quantas maneiras podemos fazer isso?

Solução

Começemos com as meninas. A primeira menina pode escolher qualquer dos 10 lugares. Logo, ela tem 10 possibilidades. Já a segunda menina só tem 8 possibilidades, porque ela não pode sentar junto com a primeira. Analogamente, a terceira menina tem 6 possibilidades, a quarta tem 4 e a quinta tem 2 possibilidades.

Definidas as posições das meninas, temos cinco rapazes para sentar em cinco lugares, o que pode ser feito de $5!$ maneiras. Logo, o número total de possibilidades, pelo princípio fundamental da multiplicação, é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5! = 3.840 \times 120 = 460.800$.

**EXEMPLO 3.8** *Anagramas¹ de TEORIA*

Considere a palavra TEORIA.

¹Anagrama: Palavra ou frase formada pela transposição das letras de outra palavra ou frase. “E dizem que a Iracema do romance de Alencar é o anagrama de América” (João Ribeiro, *Curiosidades verbais*, p. 76).

1. Quantos anagramas podemos formar?
2. Quantos anagramas começam com a letra T?
3. Quantos anagramas começam com a letra T e terminam com A?
4. Quantos anagramas têm todas as vogais juntas?

Solução

Note que o conceito de anagrama é o mesmo de permutação.

- 1 Como há seis letras diferentes, o número de anagramas é $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.
- 2 Fixada a letra T na primeira posição, as outras cinco podem ser organizadas de $5! = 120$ maneiras diferentes.
- 3 Fixadas a primeira e a última letras, as outras quatro podem ser organizadas de $4! = 24$ maneiras.
- 4 Temos quatro vogais. Esse bloco pode ser organizado de $4! = 24$ maneiras. Para juntar esse bloco com as duas consoantes, há $3! = 6$ maneiras diferentes. Logo, o número total é $24 \times 6 = 144$. ♦♦

3.4 Arranjos

Na definição de permutação, consideramos ordenações de *todos* os objetos. Mas é possível que queiramos ordenar apenas k dos n objetos, onde $k \leq n$. Nesse caso, temos a definição de *arranjo simples*.

Suponhamos, por exemplo, que quatro pessoas serão sorteadas dentre dez. Quantas filas podemos formar com as quatro pessoas sorteadas?

Como no caso das permutações, para a primeira posição da fila temos disponíveis as 10 pessoas. Para a segunda, temos 9; para a terceira, temos 8, e para a quarta e última posição, temos 7. Logo, o número total de filas com as quatro pessoas sorteadas é $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$.

Note que, para a quarta posição, já escolhemos as três anteriores; assim, sobram apenas $(10 - 3) = [10 - (4 - 1)]$. Uma outra observação interessante é a seguinte:

$$\begin{aligned} 10 \times 9 \times 8 \times 7 &= \frac{(10 \times 9 \times 8 \times 7) \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} \\ &= \frac{(10 \times 9 \times 8 \times 7) \times 6!}{6!} \\ &= \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10 - 4)!} \end{aligned}$$

Vamos ver, agora, o caso geral. Para calcular o número de arranjos de k dentre n objetos distintos, devemos notar que, para a primeira posição, existem n possibilidades. Para a segunda, $n-1$ possibilidades. Para a k -ésima e última posição, já foram escolhidos $k-1$ objetos; portanto, sobram $n - (k-1)$, ou seja, para a k -ésima posição, há $n - (k-1) = n - k + 1$ possibilidades.

Logo, o número total de arranjos de k elementos, tomados dentre n objetos distintos é $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$. Vamos denotar por A_n^k esse número.

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$$

Vamos usar o mesmo artifício para simplificar essa fórmula.

$$\begin{aligned} A_n^k &= n \times (n-1) \times \cdots \times [n - (k-1)] \\ &= n \times (n-1) \times \cdots \times [n - (k-1)] \times \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k) \times (n-k-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-k)!} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$



Arranjos simples

Dados n objetos distintos, o número de **arranjos simples** de k objetos dentre n , denotado por A_n^k , é

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (3.8)$$

É importante notar que, sendo a definição de arranjo uma generalização de permutação (note que uma permutação é um arranjo em que $k = n$), a ordem dos elementos é relevante, ou seja, $a_1 a_2 a_3$ é diferente de $a_3 a_1 a_2$.

EXEMPLO 3.9 *Campeonato de futebol*

Em um campeonato de futebol, concorrem 20 times. Quantas possibilidades existem para os três primeiros lugares?

Solução

A resposta é A_{20}^3 , pois a ordem faz diferença nesse caso. Note que

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6.840$$

**EXEMPLO 3.10** *Comissões*

De um grupo de 15 pessoas deve ser extraída uma comissão formada por um presidente, um vice-presidente e um secretário. Quantas comissões é possível formar?

Solução

A ordem aqui importa, já que os cargos não são equivalentes. Assim, a solução é

$$A_{15}^3 = \frac{15!}{12!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$$

**EXEMPLO 3.11** *Segredo de cofre*

O segredo de um cofre é formado por uma sequência de três dígitos escolhidos entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Suponha que uma pessoa saiba que o segredo é formado por três algarismos distintos. Qual o número máximo de tentativas que ela terá de fazer para abrir o cofre?

Solução

Nos segredos de cofre, a ordem importa. Como os algarismos são distintos, a resposta é $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$



3.5 Combinações Simples

Vamos considerar agora, a situação análoga a um arranjo, mas onde a ordem não importa, ou seja, $a_1 a_2 a_3$ é igual a $a_3 a_1 a_2$.

A título de ilustração, consideremos a situação na qual temos cinco objetos distintos dos quais vamos selecionar três. Como visto, o número de arranjos é $\frac{5!}{2!} = 60$. Vamos listá-los.

Objetos envolvidos									
(1,2,3)	(1,2,4)	(1,2,5)	(1,3,4)	(1,3,5)	(1,4,5)	(2,3,4)	(2,3,5)	(2,4,5)	(3,4,5)
$a_1 a_2 a_3$	$a_1 a_2 a_4$	$a_1 a_2 a_5$	$a_1 a_3 a_4$	$a_1 a_3 a_5$	$a_1 a_4 a_5$	$a_2 a_3 a_4$	$a_2 a_3 a_5$	$a_2 a_4 a_5$	$a_3 a_4 a_5$
$a_1 a_3 a_2$	$a_1 a_4 a_2$	$a_1 a_5 a_2$	$a_1 a_4 a_3$	$a_1 a_5 a_3$	$a_1 a_5 a_4$	$a_2 a_4 a_3$	$a_2 a_5 a_3$	$a_2 a_5 a_4$	$a_3 a_5 a_4$
$a_2 a_1 a_3$	$a_2 a_1 a_4$	$a_2 a_1 a_5$	$a_3 a_1 a_4$	$a_3 a_1 a_5$	$a_4 a_1 a_5$	$a_3 a_2 a_4$	$a_3 a_2 a_5$	$a_4 a_2 a_5$	$a_4 a_3 a_5$
$a_2 a_3 a_1$	$a_2 a_4 a_1$	$a_2 a_5 a_1$	$a_3 a_4 a_1$	$a_3 a_5 a_1$	$a_4 a_5 a_1$	$a_3 a_4 a_2$	$a_3 a_5 a_2$	$a_4 a_5 a_2$	$a_4 a_5 a_3$
$a_3 a_1 a_2$	$a_4 a_1 a_2$	$a_5 a_1 a_2$	$a_4 a_1 a_3$	$a_5 a_1 a_3$	$a_5 a_1 a_4$	$a_4 a_2 a_3$	$a_5 a_2 a_3$	$a_5 a_2 a_4$	$a_5 a_3 a_4$
$a_3 a_2 a_1$	$a_4 a_2 a_1$	$a_5 a_2 a_1$	$a_4 a_3 a_1$	$a_5 a_3 a_1$	$a_5 a_4 a_1$	$a_4 a_3 a_2$	$a_5 a_3 a_2$	$a_5 a_4 a_2$	$a_5 a_4 a_3$

Esta listagem está organizada de modo que, em cada coluna, os objetos envolvidos são os mesmos. Note o seguinte: como a ordem não importa, os elementos de cada coluna são iguais, ou seja, só precisamos de um deles. Mas em cada coluna temos as permutações dos três objetos envolvidos. Logo, o número de elementos em cada coluna neste exemplo é $3! = 6$. Como só precisamos de um de cada $3!$, o número total é

$$\frac{60}{3!} = \frac{5!}{2!3!}.$$

Ilustramos com esse exemplo o conceito e o cálculo do número de combinações simples de n elementos distintos tomados k a k . Dado um conjunto de n elementos distintos, a *combinação dos n elementos tomados k a k* nos dá o número de subconjuntos com k elementos (note que, em um conjunto, a ordem dos elementos não importa).



Combinações simples

Dados n objetos distintos, o número de **combinações simples** de k elementos tomados dentre os n é

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \quad (3.9)$$

O número $\binom{n}{k}$ é chamado número ou coeficiente binomial, ou ainda, número combinatorio.

Note a diferença: no conceito de arranjo, estamos lidando com *sequências* de k elementos, enquanto no conceito de combinação, estamos lidando com *subconjuntos*. Nas sequências, a ordem dos elementos é relevante, mas não nos subconjuntos.

EXEMPLO 3.12 Comissão

De um grupo de oito homens e cinco mulheres devem ser escolhidos três homens e três mulheres para formar uma comissão. Quantas comissões podem ser formadas se João e Maria, que pertencem ao grupo original, não aceitam participar em conjunto da comissão?

Solução

O número total de comissões é $\binom{8}{3} \times \binom{5}{3} = 560$. O número de comissões em que Maria e João estão juntos é dado por

$$\binom{7}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{7!}{2!5!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{7 \times 6}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 126$$

Logo, o número de comissões em que João e Maria não estão juntos é $560 - 126 = 434$.

**EXEMPLO 3.13** *Cartas de um baralho*

Considere o experimento aleatório que consiste na extração aleatória de três cartas vão ser retiradas de um baralho normal de 52 cartas. Calcule o número de elementos de cada um dos seguintes eventos:

1. E = “todas as três do naipe de espadas”;
2. M = “todas as três cartas do mesmo naipe”;
3. D = “todas as três cartas de naipes diferentes”.

Solução

1. Existem 13 cartas de espadas. Logo,

$$n(E) = \binom{13}{3} = \frac{13!}{3!10!} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2} = 286$$

2. O mesmo cálculo feito no item anterior vale para os 4 naipes. Sejam E , C , P , O os eventos “três cartas de espadas”, “três cartas de copas”, “três cartas de paus” e “três cartas de ouro”, respectivamente. Então, $M = E \cup C \cup P \cup O$ e como são eventos mutuamente exclusivos, resulta que

$$n(M) = n(E) + n(C) + n(P) + n(O) = 286 \times 4 = 1144$$

3. Para a primeira carta, temos 52 possibilidades – qualquer carta serve. Para a segunda carta, temos que excluir as cartas do naipe da primeira; logo, sobram 39. Para a terceira, temos que excluir as cartas dos dois naipes anteriores; logo, sobram 26. Pelo princípio da multiplicação, resulta que $52 \times 39 \times 26$, e

$$n(D) = 52 \times 39 \times 26 = 52.728$$

Note que o evento D não é o complementar de M , pois, por exemplo, a sequência CCE pertence ao complementar de M , mas não pertence ao evento D .

**EXEMPLO 3.14** *Mega-sena*

No jogo da Mega-Sena da Caixa Econômica Federal, o apostador deve escolher no mínimo seis e no máximo 15 números diferentes entre 1 e 60. Um jogo simples consiste na escolha de 6 números e os preços das apostas se baseiam no número de jogos simples em cada cartão. Qual é o número total de jogos simples distintos? Num cartão com 15 números marcados, quantos são os jogos simples? Se cada jogo simples custa R\$1,50, qual o preço de um cartão com 15 números marcados?

Solução

Note que, na Mega-Sena, a ordem não importa; logo, o número total de jogos simples é

$$\begin{aligned}\binom{60}{6} &= \frac{60!}{6!54!} \\ &= \frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 \times 54!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 54!} \\ &= 50.063.860\end{aligned}$$

Isso significa que a sua chance de acertar a sena é $\frac{1}{50.063.860} = 0,000000019974$.

Num cartão com 15 números marcados, o número de jogos simples é

$$\binom{15}{6} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 5005$$

e, assim, o preço desse cartão é $1,50 \times 5005 = 7507,5$.

**EXEMPLO 3.15** *Time de futebol*

Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios-de-campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios-de-campo, e 2 atacantes?

Solução

$$\binom{2}{1} \times \binom{6}{4} \times \binom{7}{4} \times \binom{4}{2} = 6.300$$

**EXEMPLO 3.16** *Torneios*

Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais, são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

Solução

Cada jogador tem $n - 1$ oponentes. Logo, existem $n \times (n - 1)$ maneiras de selecionar dois participantes. Como a ordem dos dois selecionados não importa, o número total de partidas é $\frac{n \times (n - 1)}{2}$. Logo,

$$\frac{n \times (n - 1)}{2} = 780 \Rightarrow n^2 - n - 1.560 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 6.240}}{2} = \frac{1 \pm 79}{2}$$

As raízes de tal equação são $n = 40$ e $n = -39$. Como n tem que ser positivo, a solução é $n = 40$ partidas.



3.6 Triângulo de Pascal e Binômio de Newton

O triângulo de Pascal é um quadro em formato de um triângulo (que consideraremos retângulo para facilitar a exibição), formado pelos números binomiais dispostos da seguinte forma: na hipotenusa, todos os elementos são iguais a 1, bem como no cateto vertical:

Linha	
0	1
1	1 1
2	1 1
3	1 1
4	1 1
5	1 1
6	1 1
⋮	⋮

Cada elemento no interior do triângulo é obtido como a soma do elemento imediatamente acima e do primeiro elemento acima à esquerda; o processo recursivo de construção se faz linha a linha, iniciando-se na segunda linha, conforme ilustrado a seguir:

Linha	
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 6 6 4 1
5	1 10 10 10 1
6	1 15 15 15 6 1
⋮	⋮

Linha		Linha	
0	1	0	1
1	1 1	1	1 1
2	1 2 1	2	1 2 1
3	1 3 3 1	3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1	4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1	5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1	6	1 6 15 20 15 6 1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Linha		Linha		Linha	
0	1	0	1	0	1
1	1 1	1	1 1	1	1 1
2	1 2 1	2	1 2 1	2	1 2 1
3	1 3 3 1	3	1 3 3 1	3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1	4	1 4 6 4 1	4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1	5	1 5 10 10 5 1	5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1	6	1 6 15 20 15 6 1	6	1 6 15 20 15 6 1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Continuando com esse procedimento, obtém-se o triângulo de Pascal a seguir (note que esse triângulo tem infinitas linhas e infinitas colunas...)

Linha	
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
$\vdots$	$\vdots$

Os números que aparecem em cada linha do triângulo nada mais são que os números binomiais. Numerando as linhas e colunas do triângulo a partir de zero, o elemento da linha n e coluna k é $\binom{n}{k}$. Então, em cada linha n , os elementos vão desde $\binom{n}{0}$ até $\binom{n}{n}$.

	0	1	2	3	4	5	6	...		0	1	2	3	4	5	6	...
0	1									$\binom{0}{0}$							
1	1	1								$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	1	2	1							$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	1	3	3	1						$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	1	4	6	4	1					$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
5	1	5	10	10	5	1				$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
6	1	6	15	20	15	6	1			$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
⋮																	

Existem vários resultados sobre os números combinatórios e várias propriedades associadas às linhas e colunas do triângulo de Pascal. A propriedade utilizada na construção do triângulo é a propriedade já vista dos números binomiais, chamada Relação de Stifel.

! Relação de Stifel

A soma de dois elementos consecutivos de uma mesma linha é igual ao elemento situado abaixo da última parcela, ou seja

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (3.10)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} = \\
 &= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{[(k+1)k!][(n-k)(n-k-1)!]} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \\
 &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}
 \end{aligned}$$

■

Considere a n -ésima linha do triângulo de Pascal e seja $k < n$. Então, $\binom{n}{k}$ é o elemento que está na linha n avançado de k colunas em relação ao início da linha; já $\binom{n}{n-k}$ é o elemento que está na linha n atrasado de k colunas em relação ao final da linha. Números combinatórios como $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{n-k}$ são chamados *combinações complementares*.

! Relação das Combinações Complementares

Em uma mesma linha do triângulo de Pascal, elementos equidistantes dos extremos são iguais, ou seja:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (3.11)$$

Demonstração:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! [n - (n-k)]!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

! Teorema das Linhas

A soma dos elementos da n -ésima linha é igual a 2^n , ou seja:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \quad (3.12)$$

Em termos de somatório:

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$$

Demonstração:

Como visto, o número combinatório $\binom{n}{k}$ dá o número de subconjuntos de tamanho k de um conjunto de tamanho n . Assim, na expressão (3.12), cada número combinatório dá o número de subconjuntos de determinado tamanho e a soma deles dá o número total de subconjuntos de um conjunto de tamanho n . Mas para formar subconjuntos de tal conjunto podemos usar o seguinte artifício: cada elemento pode ser marcado com um $+$ para indicar que pertence ao subconjunto, ou com um $-$, para indicar que não pertence ao subconjunto. O número total de formas de fazer isso é $2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ e isso prova que o número total de subconjuntos de um conjunto de tamanho n é 2^n e isso completa a prova.

**Teorema das colunas**

A soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal, começando da primeira linha, é igual ao elemento que está avançado uma linha e uma coluna em relação ao último elemento da soma, ou seja:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

Em termos de somatório:

$$\sum_{j=0}^n \binom{k+j}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

Demonstração:

Vamos aplicar a relação de Stifel aos elementos da coluna $k+1$, a partir da primeira linha desta coluna:

$$\begin{aligned} \binom{k+1}{k+1} &= \binom{k}{k} \\ \binom{k+2}{k+1} &= \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} \\ \binom{k+3}{k+1} &= \binom{k+2}{k} + \binom{k+2}{k+1} \\ \binom{k+4}{k+1} &= \binom{k+3}{k} + \binom{k+3}{k+1} \\ &\vdots \\ \binom{k+n-1}{k+1} &= \binom{k+n-2}{k} + \binom{k+n-2}{k+1} \\ \binom{k+n}{k+1} &= \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n-1}{k+1} \\ \binom{k+n+1}{k+1} &= \binom{k+n}{k} + \binom{k+n}{k+1} \end{aligned}$$

Somando essas igualdades termo a termo, podemos ver que há parcelas iguais em lados opostos, que podem ser simplificadas. Todos os termos do lado esquerdo, com exceção do último, cancelam com termos do lado direito e o que sobra é:

$$\binom{k+n+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \binom{k+3}{k} + \cdots + \binom{k+n-2}{k} + \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n}{k}$$

ou seja

$$\sum_{j=0}^n \binom{k+j}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

o que completa a prova. ■



Binômio de Newton

Dados quaisquer números reais x e a e um inteiro qualquer n , então

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k} \quad (3.13)$$

Demonstração:

Vamos provar este resultado usando o método da indução.

- O resultado é válido para $n = 1$. De fato:

$$\begin{aligned} (x + a)^1 &= x + a \\ \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k x^{1-k} &= \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} a = x + a \end{aligned}$$

- Suponhamos que o resultado seja válido para n qualquer e vamos provar que é válido para $n + 1$. Mais precisamente, temos as seguintes hipótese de indução e tese:

$$\begin{aligned} \text{H.I. :} \quad (x + a)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k} \\ \text{Tese :} \quad (x + a)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k x^{n+1-k} \end{aligned}$$

Demonstração:

Usando propriedades de potência e a hipótese de indução, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 (x + a)^{n+1} &= (x + a)(x + a)^n \\
 &= (x + a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} x^{n-k}
 \end{aligned}$$

Vamos separar o primeiro termo ($k = 0$) do primeiro somatório e o último termo ($k = n$) do segundo somatório:

$$\begin{aligned}
 (x + a)^{n+1} &= \left[\binom{n}{0} a^0 x^{n-0+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1} \right] + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} x^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^{n-n} \right] \\
 &= \left[\binom{n}{0} a^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1} \right] + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} x^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^0 \right]
 \end{aligned}$$

Note que ambos os somatórios têm n parcelas cada um. Vamos fazer uma mudança de variável no segundo somatório, de modo que a potência de a passe a ser j em vez de $k + 1$. Mais precisamente, vamos definir

$$k + 1 = j \Rightarrow \begin{cases} k = j - 1 \\ k = 0 \Rightarrow j = 1 \\ k = n - 1 \Rightarrow j = n \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (x + a)^{n+1} &= \left[\binom{n}{0} a^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1} \right] + \left[\sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^j x^{n-j+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^0 \right] \\
 &= \left[\binom{n}{0} a^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1} \right] + \left[\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k x^{n-k+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^0 \right]
 \end{aligned}$$

Aqui, apenas trocamos o índice j por k . Note que as potências de a e x são as mesmas em ambos os somatórios. Logo, podemos colocar em evidência num único somatório:

$$(x + a)^{n+1} = \binom{n}{0} a^0 x^{n+1} + \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^k x^{n-k+1} \right\} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^0$$

Note, agora, os números combinatórios que aparecem entre colchetes: estamos somando 2 números combinatórios consecutivos da linha n . Pela relação de Stifel, sabemos que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Sabemos, também, que

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= \binom{n+1}{0} \\ \binom{n}{n} &= \binom{n+1}{n+1}\end{aligned}$$

Substituindo esses resultados, obtemos que

$$\begin{aligned}(x+a)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}a^0x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k}a^kx^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}x^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}a^kx^{n-k+1}\end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

3.6.1 Aplicações

1. Note que, fazendo $x = 1$ e $a = 1$ na equação (3.13), obtemos que

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

o que nos dá uma outra prova do teorema das linhas.

2. Note que, fazendo $x = 1$ e $a = -1$ na equação (3.13), obtemos que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

3. Fórmula de Euler:

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r} \quad (3.14)$$

Essa fórmula pode ser considerada verdadeira para quaisquer valores de m, n, r desde que adotemos a convenção de que $\binom{n}{r} = 0$ para $r > n$.

Para demonstrar esse resultado usando argumentos combinatórios, suponha um conjunto com $n + m$ elementos, de modo que m desses elementos estão em uma categoria I e os n elementos restantes estão em outra categoria II.

Vamos expandir o termo do lado esquerdo:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{r-2} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}$$

O termo do lado direito da expressão nos dá o número de subconjuntos deste conjunto com r elementos. O primeiro termo da soma do lado esquerdo nos dá o número de subconjuntos com nenhum elemento da categoria I e r elementos da categoria II; o segundo termo nos dá o número de subconjuntos com exatamente um elemento da categoria I e $r - 1$ elementos da categoria II; o terceiro termo nos dá o número de subconjuntos com exatamente dois elementos da categoria I e $r - 2$ elementos da categoria II e, sucessivamente, o último termo nos dá o número de subconjuntos com exatamente r elementos da categoria I e nenhum elemento da categoria II. Somando esses termos, obtemos o número total de subconjuntos com r elementos, que é $\binom{m+n}{r}$.

4. Fazendo $m = r = n$ na equação (3.14), obtemos que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

Mas pela relação das combinações complementares $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, o que nos dá:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

5. Vamos mostrar que

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

De fato:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!}$$

Como $k \neq 0$, podemos dividir ambos os termos por k , o que resulta

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $k-1 = j$, podemos escrever (note os índices do somatório!):

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} = n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} = n \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n2^{n-1}$$

usando o resultado (3.12).

6. Vamos mostrar que

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

De fato: fazendo $k-1 = j$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} &= \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)j \binom{n}{j+1} = \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)j \frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)j \frac{n!}{(j+1)j!(n-j-1)!} = \sum_{j=1}^{n-1} j \frac{n!}{j(j-1)!(n-j-1)!} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(j-1)!(n-j-1)!} \end{aligned}$$

Fazendo $j-1 = i$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(j-1)!(n-j-1)!} = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n!}{i!(n-i-2)!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n(n-1)(n-2)!}{i!(n-2-i)!} = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} = n(n-1)2^{n-2} \end{aligned}$$

Mais uma vez, usamos o teorema das linhas.

7. Se n é par, então

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n}$$

De fato: o desenvolvimento do binômio de Newton nos dá que

$$\begin{aligned} (x+a)^n &= \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} \\ &+ \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} x^1 + \binom{n}{n} a^n x^0 \\ &\equiv T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1} + T_n \end{aligned}$$

em que

$$T_k = \binom{n}{k} a^k x^{n-k}$$

Analogamente, se n é par

$$\begin{aligned} (x-a)^n &= \binom{n}{0}(-a)^0x^n + \binom{n}{1}(-a)^1x^{n-1} + \binom{n}{2}(-a)^2x^{n-2} \\ &+ \cdots + \binom{n}{n-1}(-a)^{n-1}x^1 + \binom{n}{n}(-a)^nx^0 \\ &\equiv T_0 - T_1 + T_2 + \cdots - T_{n-1} + T_n \end{aligned}$$

Então,

$$(x+a)^n + (x-a)^n = 2(T_0 + T_2 + \cdots + T_{n-2} + T_n)$$

e

$$(x+a)^n - (x-a)^n = 2(T_1 + T_3 + \cdots + T_{n-3} + T_{n-1})$$

Fazendo $x = a = 1$, resulta que

$$\begin{aligned} 2^n &= 2(T_0 + T_2 + \cdots + T_{n-2} + T_n) = 2 \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} \right] \\ 2^n &= 2(T_1 + T_3 + \cdots + T_{n-3} + T_{n-1}) = 2 \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} \right] \end{aligned}$$

Logo, se n é par

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} = 2^{n-1}$$

8. Números de Fibonacci e o triângulo de Pascal

O número de Fibonacci F_n é definido como a soma dos elementos da n -ésima “diagonal inversa” do triângulo de Pascal. Veja a Figura 3.2

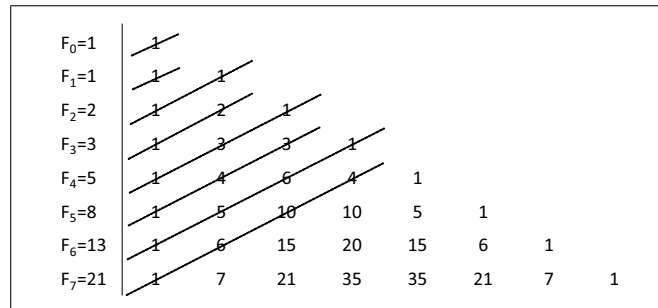


Figura 3.2 – Números de Fibonacci no Triângulo de Pascal

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots + \binom{n-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \quad n \text{ par}$$

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots + \binom{n-\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} \quad n \text{ ímpar}$$

Cada número na sequência de Fibonacci é a soma dos dois números anteriores, isto é:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

De fato: sem perda de generalidade, vamos supor n par (logo, $n+1$ é ímpar e $n+2$ é par.)

$$\begin{aligned} F_n + F_{n+1} &= \left[\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots + \binom{n - (\frac{n}{2} - 1)}{\frac{n}{2} - 1} + \binom{n - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \right] + \\ &\quad \left[\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \cdots + \binom{n+1 - \frac{n+1-1}{2}}{\frac{n+1-1}{2}} \right] \\ &= \left[\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots + \binom{n+1 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2} - 1} + \binom{n - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \right] + \\ &\quad \left[\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \cdots + \binom{n+1 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \right] \\ &= \binom{n+1}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \right] + \left[\binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{3} \right] + \cdots + \\ &\quad \left[\binom{n+1 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2} - 1} + \binom{n+1 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \right] + \binom{n - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \\ &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \cdots + \binom{n+2 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} + \binom{n - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Note os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{0} &= \binom{n+2}{0} \\ n \text{ par} &\implies n = 2 \times \frac{n}{2} \implies \binom{n - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} = \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} = \binom{n+2 - \frac{n+2}{2}}{\frac{n+2}{2}} = \binom{n+2 - (\frac{n}{2} + 1)}{\frac{n}{2} + 1} \end{aligned}$$

Resulta, então, que

$$F_n + F_{n+1} = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \cdots + \binom{n+2 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} + \binom{n+2 - \frac{n+2}{2}}{\frac{n+2}{2}} = F_{n+2}$$

3.7 Permutações Circulares

Consideremos agora a situação em que queremos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo. Exemplos dessa situação: roda de ciranda, pessoas sentadas em torno de uma mesa redonda. O ponto relevante aqui é que consideramos equivalentes disposições que coincidem por rotação. Veja a Figura 3.3: rodando no sentido horário de tal forma que A ocupe o lugar de B , B ocupe o lugar de C , etc, temos a mesma disposição. Nesse exemplo, temos 5 disposições equivalente: considerando a posição (1), por rotação, nela podem estar A , B , C , D ou E . Logo, das $5!$ disposições (permutações), 5 são equivalentes. Logo, o número de rodas nesse caso é $\frac{5!}{5} = 4!$

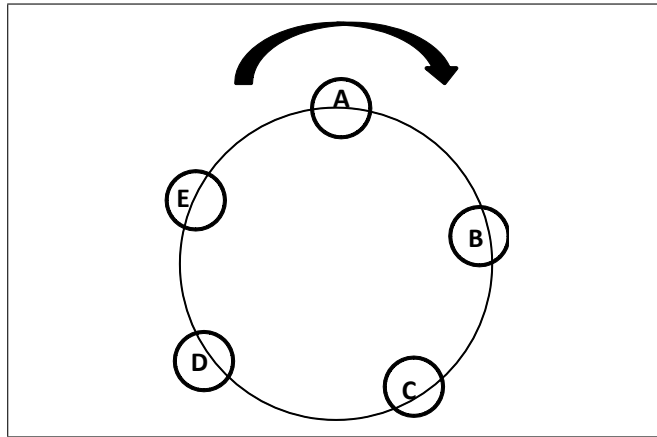


Figura 3.3 – Permutações circulares

3.8 Permutações de Objetos nem Todos Distintos

Considere o seguinte exemplo: quantos anagramas podemos formar a partir da palavra URUGUAI? Se pudéssemos distinguir entre os três U's, a resposta seria $7!$. Para exemplificar, vamos representá-los por U_1, U_2, U_3 as três letras Us, de modo a diferenciá-las. Nas $7!$ permutações, estamos considerando como diferentes os seguintes anagramas: $U_1U_2U_3RGAI$ e $U_2U_1U_3RGAI$. Como não podemos distinguir os três Us, esses anagramas são o mesmo. Para cada um dos $7!$ anagramas, $3!$ são iguais - note que $3!$ corresponde às permutações das 3 letras Us. Logo, o número de anagramas (permutações) é $\frac{7!}{3!}$.

Vamos considerar o caso geral: são dados n objetos, dos quais n_1 são iguais entre si, n_2 são iguais entre si e distintos dos demais, ..., n_k são distintos entre si. É claro que temos que ter $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. O número de permutações desses objetos é dado por

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad n = \sum_{i=1}^k n_i$$

Um exemplo clássico com o lançamento de um dado: suponha que se jogue um dado 20 vezes. De quantas maneiras podemos obter 6 1s, 5 2s e 1 face de cada um dos quatro números restantes? A resposta é $\frac{20!}{6!5!4!}$.

3.9 Soluções inteiras de equações lineares

Vamos considerar uma equação da forma

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

Nosso objetivo é contar o número de soluções inteiras de tal equação. Mas para que haja um número finito de soluções, temos que restringir ainda mais, ou seja, não basta que as soluções

sejam inteiras – é necessário que sejam inteiras positivas, por exemplo. Veremos depois o caso de soluções inteiras não negativas.

Vamos considerar o seguinte exemplo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13 \quad (3.15)$$

Vamos escrever 13 como a soma de 13 1s:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13 \quad (3.16)$$

Como as 5 soluções devem ser inteiras e positivas, elas podem ser escritas como soma de 1s. Assim, determinar essas soluções equivale a separar esses 13 1s em cinco grupos. Isso pode ser feito colocando 4 barras divisórias na soma acima. Algumas possibilidades são:

$$\begin{aligned} 1 + 1 \mid + 1 + 1 + 1 \mid + 1 + 1 \mid + 1 + 1 + 1 + 1 \mid + 1 + 1 &= 13 \\ 1 \mid + 1 \mid + 1 \mid + 1 \mid + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 &= 13 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \mid + 1 + 1 + 1 \mid + 1 + 1 + 1 \mid + 1 + 1 \mid + 1 &= 13 \end{aligned}$$

Essas escolhas equivalem às seguintes soluções:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 = 2 & x_2 = 3 & x_3 = 2 & x_4 = 4 & x_5 = 2 \\ x_1 = 1 & x_2 = 1 & x_3 = 1 & x_4 = 1 & x_5 = 9 \\ x_1 = 4 & x_2 = 3 & x_3 = 3 & x_4 = 2 & x_5 = 1 \end{array}$$

Note que as barras verticais estão posicionadas antes do sinal +. Então, para determinar uma solução inteira positiva, temos que posicionar 4 ($= 5 - 1$) barras verticais nas 12 ($= 13 - 1$) posições definidas pelos sinais de +. Logo, o número de soluções inteiras positivas é o número de maneiras de escolher 4 sinais de + dentre os 12 disponíveis. Isso pode ser feito de C_{12}^4 .

Isso nos permite enunciar o resultado geral.

! Soluções de equações em inteiros positivos

Considere a equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m \quad m > 0$$

O número de soluções em inteiros positivos ($x_i > 0$) é dado por C_{m-1}^{r-1}

Vamos considerar, agora, soluções inteiras não-negativas, isto é, vamos permitir que alguma, ou algumas, das incógnitas seja nula.

Continuando com a equação (3.15), vamos considerar a sequência de 13 1s:

$$1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \tag{3.17}$$

Temos agora as seguintes semelhanças e diferenças:

- como antes, temos que colocar 4 barras separadoras para determinar os valores das 5 incógnitas;
- como a primeira e a última incógnitas podem ser nulas, podemos ter uma barra no início e/ou uma barra no final;
- como as demais incógnitas podem ser nulas, podemos ter barras “coladas”.

Por exemplo, a solução (0,2,4,0,7) corresponde à seguinte decomposição:

$$| \ 1 \ 1 \ | \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ | \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$$

Já a solução (0,0,5,8,0) corresponde à seguinte decomposição:

$$| \ | \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ |$$

Note que nessas decomposições temos 17 elementos: 4 barras verticais e 13 1s. As diferentes soluções inteiras não-negativas correspondem às diferentes maneiras de organizar as 4 ($= 5 - 1$) barras verticais nessas 17 ($= 13 + 5 - 1$) posições, ou seja, o número de soluções inteiras não-negativas é C_{17}^4 .

Podemos enunciar o resultado geral da seguinte forma:

! Soluções de equações em inteiros não-negativos

Considere a equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m \quad m > 0$$

O número de soluções em inteiros não-negativos ($x_i \geq 0$) é dado por C_{m+r-1}^{r-1}

Uma outra forma de analisar o problema de soluções em inteiros não-negativos é explorando a sua relação com soluções inteiras positivas de uma outra equação obtida através de uma mudança de variável. Note o seguinte: se x_i é inteiro não-negativo, isto é, $x_i \geq 0$, se definimos

$y_i = x_i + 1$, então y_i é inteiro e $y_i \geq 1$, ou equivalentemente, $y_i > 0$. Fazendo a mudança de variável, obtemos uma nova equação equivalente:

$$(y_1 - 1) + (y_2 - 1) + \cdots + (y_r - 1) = m \quad m > 0, \quad y_i > 0$$

ou ainda

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_r = m + r \quad m > 0, \quad y_i > 0$$

cujo número total de soluções é, como visto anteriormente, C_{m+r-1}^{r-1} .

Note que

$$C_{m+r-1}^{r-1} = C_{m+r-1}^m$$

pela lei dos complementares.

EXEMPLO 3.17 Soluções inteiras de equações

Considere a seguinte equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

- (a) Determine o número de soluções inteiras positivas.
- (b) Determine o número de soluções inteiras não-negativas.
- (c) Determine o número de soluções inteiras positivas, em que $x_2 > 4$.

Solução

(a)

$$C_{12-1}^{3-1} = C_{11}^2 = \frac{11!}{9!2!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{9!2!} = 55$$

(b)

$$C_{12+3-1}^{3-1} = C_{14}^2 = \frac{14!}{12!2!} = \frac{14 \times 13 \times 12!}{12!2!} = 91$$

(c) Fazendo as seguintes mudanças de variável:

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = x_2 - 4 \quad y_3 = x_3$$

a equação dada pode ser escrita com:

$$y_1 + (y_2 + 4) + y_3 = 12 \quad y_i > 0$$

que é equivalente a

$$y_1 + y_2 + y_3 = 8 \quad y_i > 0$$

Como a transformação acima é biunívoca, o número de soluções das duas equações é o mesmo:

$$C_{8-1}^{3-1} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$



3.10 Combinações com repetição ou combinações completas

Consideremos n objetos distintos, dos quais vamos escolher p objetos, *distintos ou não*. De quantas maneiras podemos fazer isso?

Para entender bem essa situação, considere o seguinte exemplo: numa sorveteria, há 7 sabores de sorvete dietético. Se eu quero comprar 4 bolas de sorvete dietético, de quantas maneiras posso escolher? A resposta NÃO É C_7^4 – esse é o número de maneiras de escolher 4 bolas de sabores diferentes! Mas eu posso comprar 4 bolas do mesmo sabor, por exemplo.

Vamos denotar por x_i , $i = 1, \dots, 7$, o número de bolas compradas do sabor i . Então, temos que ter x_i inteiro não-negativo satisfazendo a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4, \quad x_i \geq 0$$

O número de soluções dessa equação nos dá o número total de maneiras de escolher as 4 bolas de sorvete. Esse número é $C_{7+3-1}^{3-1} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$.

Vamos generalizar esse exemplo. O contexto é o seguinte: temos n objetos distintos dos quais vamos escolher p , *distintos ou não*.

Temos, então, n tipos distintos de objetos. Vamos denotar por x_i o número de objetos escolhidos do tipo i , $i = 1, 2, \dots, n$. Temos que ter x_i inteiro não-negativo satisfazendo a equação

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = p, \quad x_i \geq 0$$

O número de soluções dessa equação nos dá o número de combinações com repetição de n objetos distintos tomados p a p e esse número é

$$CR_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!p!} = C_{n-1+p}^p \quad (3.18)$$

3.11 Exercícios propostos

3.1 Considere a palavra TEORIA.

1. Quantos anagramas ²podemos formar?
2. Quantos anagramas começam com a letra T?

²Segundo o Aurélio Século XXI:

Anagrama: Palavra ou frase formada pela transposição das letras de outra palavra ou frase.

“E dizem que a Iracema do romance de Alencar é o anagrama de América” (João Ribeiro, *Curiosidades Verbais*, p. 76)

3. Quantos anagramas começam com a letra *T* e terminam com *A*?

4. Quantos anagramas têm todas as vogais juntas?

3.2 Em um campeonato de futebol, concorrem 20 times. Quantas possibilidades existem para os três primeiros lugares?

3.3 O segredo de um cofre é formado por uma seqüência de 3 dígitos escolhidos entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Suponha que uma pessoa saiba que o segredo é formado por três algarismos distintos. Qual é o número máximo de tentativas que ela terá de fazer para abrir o cofre?

3.4 Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8, 9?

3.5 Mega-Sena No jogo da Mega-Sena da Caixa Econômica Federal, o apostador deve escolher no mínimo seis e no máximo 15 números diferentes entre 1 e 60. Um jogo simples consiste na escolha de 6 números e os preços das apostas se baseiam no número de jogos simples em cada cartão. Qual é o número total de jogos simples distintos? Num cartão com 15 números marcados, quantos são os jogos simples? Se cada jogo simples custa R\$1,50, qual o preço de um cartão com 15 números marcados?

3.6 Três cartas vão ser retiradas de um baralho normal de 52 cartas. Calcule a probabilidade de que:

1. todas as três sejam de espadas;
2. as três cartas sejam do mesmo naipe;
3. as três cartas sejam de naipes diferentes.

3.7 Quantos inteiros entre 1000 e 9999 têm dígitos distintos e

(a) são pares?

(b) consistem apenas de dígitos ímpares?

3.8 De quantas maneiras podemos escolher 3 números naturais distintos de 1 a 30, de modo que a soma dos números escolhidos seja par?

3.9 Determine o valor de n se

1. $A_n^2 = 72$

2. $A_n^4 = 42A_n^2$

3. $4A_n^2 = A_{2n}^3$

3.10 Numa promoção beneficente, 22 pessoas estão disponíveis para exercer diversas atividades. Se há necessidade de 6 pessoas na cozinha, 4 pessoas no balcão de atendimento, 4 pessoas para os caixas, 6 pessoas para vender cartelas de bingo e 2 pessoas responsáveis pela animação, de quantas maneiras é possível fazer a escalação?

3.11 Suponha que, no problema anterior, cada pessoa execute uma tarefa diferente no seu próprio grupo, com exceção das pessoas que vendem cartelas de bingo. De quantas maneiras diferentes a escalação pode ser feita?

3.12 Considere as letras da palavra PERMUTA. Quantos anagramas de 4 letras podem ser formados, se

(a) não há qualquer restrição sobre as letras do anagrama?

(b) o anagrama começa e termina por vogal?

(c) a letra R aparece?

(d) a letra T aparece e o anagrama termina por vogal?

(e) a letra T aparece ou o anagrama termina por vogal?

3.13 Num concurso para preenchimento de uma vaga, apresentam-se 3 candidatos. A comissão julgadora é formada por 5 membros, cada um dos quais deve escolher exatamente um candidato. De quantas maneiras os votos desses examinadores podem ser dados?

3.14 As letras em código MORSE são formadas por sequências de traços e pontos, sendo permitidas repetições. Quantas letras podem ser formadas usando

(a) exatamente três símbolos?

(b) no máximo oito símbolos?

3.15 Quantos números formados por 3 algarismos escolhidos dentre 2, 4, 6, 5, 9 contêm o 2 ou não contêm o 6?

3.16 Quantos anagramas da palavra PASTEL começam e terminam com consoante?

3.17 Temos 15 livros, dos quais 4 são de Estatística. De quantas maneiras podemos coloca-los numa prateleira, de modo que os livros de Estatística fiquem sempre juntos?

3.18 Mostre que $\frac{(n+2)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!}$ é um quadrado perfeito.

3.19 Um grupo é formado por 20 pessoas, das quais 5 são Físicos. Quantas comissões de 10 pessoas podem ser formadas de modo que

- (a) nenhum membro seja Físico?
- (b) todos os Físicos participem da comissão?
- (c) haja exatamente um Físico na comissão?
- (d) pelo menos um Físico participe da comissão?

3.20 De quantas maneiras 12 estudantes podem ser divididos e colocados em 3 salas, sendo 4 na primeira sala, 5 na segunda e 3 na terceira?

3.21 As placas de automóveis em determinada cidade constam de 2 letras e 4 algarismos. Quantas placas podem ser formadas com as letras P, Q, R e os algarismos 0, 1, 7 e 8?

3.22 Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

3.23 Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais, são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

3.24 Em uma urna há 15 bolas numeradas de 1 a 15. Três bolas são retiradas da urna sem reposição, anotando-se a sequência dos números das bolas. Em quantas dessas sequências

- (a) o menor número é 7 ?
- (b) o maior número é 7 ?

3.25 Quantas coleções não vazias de letras podem ser formadas com n A's, n B's, n C's e n D's?

3.26 *Quantos números distintos podem ser formados pelo produto de dois ou mais números do multiconjunto³ 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7?*

3.27 *Um coro possui 10 membros. De quantas maneiras se pode selecionar 3 grupos distintos de 6 membros cada, por ocasião de 3 eventos distintos?*

3.28 *De quantas maneiras 10 livros distintos podem ser colocados em 5 caixas idênticas, contendo ois livros cada caixa?*

3.29 *De quantas maneiras as letras da palavra SERRILHOU podem ser permutadas, mantendo-se as vogais em sua ordem natural e não permitindo que duas letras R fiquem juntas?*

3.30 *De quantas maneiras 18 objetos distintos podem ser divididos entre 5 pessoas de modo que*

(a) 4 pessoas fiquem com 4 objetos cada e uma fique com 2 objetos?

(b) 3 pessoas recebam 4 objetos cada e as outras duas recebam 3 objetos cada?

3.31 *Considerando que haja 14 tipos de objeto e 2 objetos de cada tipo, encontre o número total de seleções nas quais pelo menos um objeto é selecionado.*

3.32 *De quantas maneiras 27 livros distintos podem ser distribuídos entre as pessoas A, B e C, de modo que que A e C, juntas, fiquem com o dobro de livros de B e ninguém fique com todos os livros?*

3.33 *De quantas maneiras podemos distribuir 18 livros iguais em 3 caixas diferentes, sem qualquer restrição?*

3.34 *Em quantas soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18$ exatamente 2 variáveis são iguais a 1?*

3.35 *De quantas maneiras 8 meninos e 8 meninas podem formar uma roda na qual*

(a) pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

(b) todas as meninas fiquem juntas?

³denominação utilizada para conjuntos que consideram relevante, em sua composição, o número de cópias de cada elemento

3.36 De um grupo de n pessoas, k ($k \leq n$) serão escolhidas para um comitê, das quais uma será o presidente do comitê. Neste contexto, interprete cada uma das expressões:

(a)

$$\binom{n}{k} \cdot k$$

(b)

$$\binom{n}{k-1} \cdot (n-k+1)$$

(c)

$$n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

Conclua e demonstre que

$$\binom{n}{k} \cdot k = \binom{n}{k-1} \cdot (n-k+1) = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

Capítulo 4

Probabilidade: Axiomas e Propriedades

4.1 Introdução

Considere, mais uma vez, o experimento aleatório que consiste no lançamento de um dado equilibrado. Como já visto, o espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e alguns eventos de interesse são $A = \text{“sair face 2”}$, $B = \text{“sair face par”}$, etc. A questão que se coloca, agora, é como atribuir *probabilidade* a esses eventos. Ou seja, queremos determinar um número que expresse a verossimilhança de cada um desses eventos.

Uma solução seria lançar o dado um grande número de vezes e observar a proporção dos lançamentos que resultam no evento A . Se denotarmos por $n(A)$ o número de vezes que ocorreu o evento A em n lançamentos, a definição de probabilidade com base na frequência relativa é

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Essa definição tem alguns problemas, a saber: quão grande deve ser n ? quem garante que a razão $\frac{n(A)}{n}$ converge e converge sempre para o mesmo número cada vez que repetimos o experimento? Temos que buscar, então, uma nova forma de definir probabilidade.

4.2 Definição axiomática de probabilidade

A abordagem que adotaremos será a utilização da definição axiomática da probabilidade. Isto é, vamos estabelecer algumas propriedades mínimas que se espera sejam satisfeitas pela probabilidade de qualquer evento. Tais propriedades são os *axiomas da probabilidade*.¹

¹**Axioma:** (1) Premissa imediatamente evidente que se admite como universalmente verdadeira sem exigência de demonstração. (2) Proposição que se admite como verdadeira porque dela se podem deduzir as proposições de uma teoria ou de um sistema lógico ou matemático. (dicionário *Aurélio*)

A título de motivação, vamos usar o experimento do lançamento de um dado, bem como a definição frequentista vista acima. A primeira observação que podemos fazer é a seguinte: dado um experimento aleatório, desejamos atribuir probabilidade aos eventos do respectivo espaço amostral, ou seja, para cada evento, queremos determinar um número que indique a probabilidade desse evento. Assim, probabilidade é uma função definida no conjunto de todos os eventos de um espaço amostral Ω . Vamos denotar tal função por P .

Uma primeira propriedade bastante intuitiva é que a probabilidade de qualquer evento deve ser um número não negativo, ou seja, para qualquer evento A , $P(A) \geq 0$.

Para apresentar a segunda propriedade, considere o seguinte evento associado ao experimento do lançamento de um dado: $C = \text{"face menor que 7"}$. É bastante intuitivo ver que, ao lançarmos um dado, *sempre* obteremos uma face menor que 7, ou seja, a proporção de vezes que obteremos o evento C será sempre 1, não importa quantas vezes lancemos o dado. Note, também, que $C = \Omega$. Assim, a segunda propriedade que vamos exigir da probabilidade é que $P(\Omega) = 1$.

A terceira propriedade envolve a união de eventos mutuamente exclusivos. Vimos que, se $A \cup B = \emptyset$, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ e, assim, a definição frequentista da probabilidade nos daria que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Esse é o terceiro e último axioma que precisamos para definir probabilidade.

DEFINIÇÃO Definição Axiomática de Probabilidade

Seja Ω um espaço amostral associado a um experimento aleatório. Probabilidade é uma função, denotada por P , que associa a cada evento A de Ω um número real $P(A)$, que satisfaz os seguintes axiomas:

- I. Axioma 1: $P(A) \geq 0$
- II. Axioma 2: $P(\Omega) = 1$
- III. Axioma 3: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4.3 Propriedades da probabilidade

Vamos, agora, estabelecer propriedades da probabilidade, que resultam diretamente dos Axiomas I a III.

1. $P(\emptyset) = 0$

Demonstração: Como $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, resulta que $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset)$. Mas Ω e $\emptyset$ são mutuamente exclusivos; portanto, podemos aplicar o Axioma III para obter

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = P(\Omega) - P(\Omega) = 0$$

■

$$2. P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Demonstração: Vimos, em capítulo anterior, que $\Omega = A \cup \bar{A}$. Como A e $\bar{A}$ são mutuamente exclusivos, podemos aplicar o Axioma III para obter que

$$P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

Mas, pelo Axioma II, $P(\Omega) = 1$. Logo,

$$1 = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

■

$$3. P(A \setminus B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

Demonstração: Veja a **Figura 4.1** para visualizar melhor esse resultado.

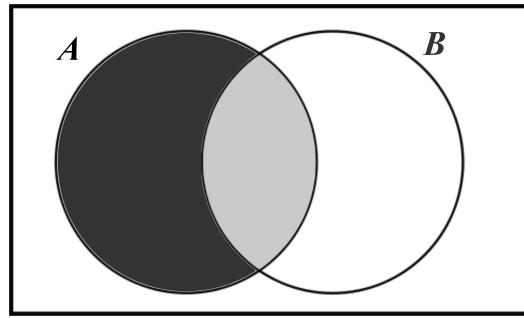


Figura 4.1 – Diferença de dois eventos $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Temos que

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

O primeiro termo é a parte sombreada mais escura, e o segundo termo é a parte sombreada mais clara. Podemos ver que essas duas partes não têm interseção. Logo, pelo Axioma III, podemos escrever:

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Volte à **Figura 4.1** para ver que o evento $B \setminus A = B \cap \bar{A}$ corresponde à parte não sombreada do evento B e que

$$P(B \setminus A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$$

■

4. Para dois eventos A e B quaisquer,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B).$$

Demonstração: Note que esse resultado generaliza o Axioma III para dois eventos quaisquer, ou seja, não estamos exigindo que A e B sejam mutuamente exclusivos. Veja a **Figura 4.2**:

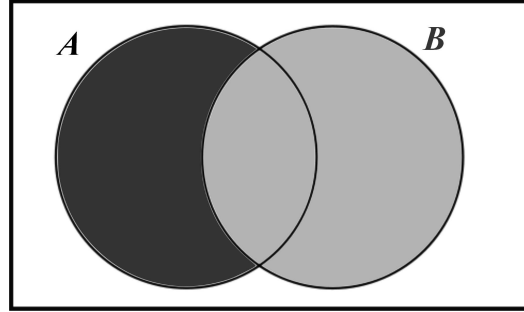


Figura 4.2 – União de dois eventos quaisquer $A \cup B$

Toda a parte sombreada representa a união dos dois eventos, que pode ser decomposta nas duas partes com diferentes sombreamentos. A parte mais escura é $A \setminus B$, e a parte mais clara é B , ou seja:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$

Como essas duas partes sombreadas não têm interseção, pelo Axioma III, resulta que

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$$

Usando a Propriedade 3, conclui-se que

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) + \Pr(B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

■

5. Se $A \subset B$ então $\Pr(A) \leq \Pr(B)$.

Demonstração: Veja a **Figura 4.3**.

Se $A \subset B$, então $A \cap B = A$ (essa é a parte sombreada da figura). Neste caso, usando a Propriedade 3, temos que

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)$$

Mas, pelo Axioma I, a probabilidade de qualquer evento é não-negativa. Logo,

$$P(B \setminus A) \geq 0 \Rightarrow P(B) - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

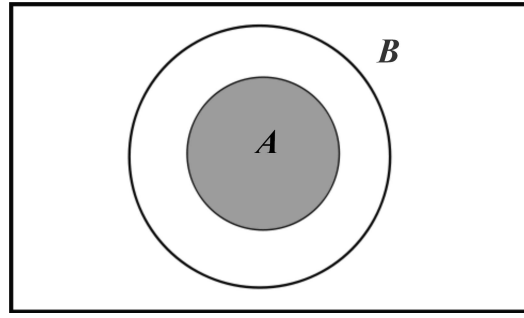


Figura 4.3 – Dois eventos tais que $A \subset B$

6. $\Pr(A) \leq 1$ para qualquer evento $A \subset \Omega$.

Demonstração: Usando a Propriedade 5 e o Axioma II, temos que

$$A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A) \leq 1$$

4.4 Espaços amostrais finitos e equiprováveis

Vamos considerar, agora, uma situação especial, em que o espaço amostral Ω é finito e todos os seus eventos elementares são igualmente prováveis. Esse contexto leva à *definição clássica de probabilidade*, que foi a primeira definição formal de probabilidade, tendo sido explicitada por Girolamo Cardano (1501-1576).

Sejam $E_1, E_2, \dots, E_N$ os eventos elementares de Ω . Então,

$$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N$$

e esses eventos elementares são mutuamente exclusivos dois a dois. Pode-se provar, por indução, que

$$P(\Omega) = 1 = P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_N)$$

Mas estamos supondo que todos eles são igualmente prováveis. Logo,

$$P(E_i) = \frac{1}{N} = \frac{1}{n(\Omega)} \quad \forall i$$

Como qualquer evento $A \subset \Omega$ pode ser escrito como união de eventos elementares, resulta que

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

DEFINIÇÃO Definição clássica de probabilidade

Seja Ω um espaço amostral finito cujos eventos elementares são todos igualmente prováveis, isto é, podemos escrever

$$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N$$

onde

$$P(E_i) = \frac{1}{N} = \frac{1}{n(\Omega)} \quad \forall i$$

Então, para qualquer evento $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

EXEMPLO 4.1 Lançamento de um dado

No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter face maior que 4?

Solução:

Note que esse é um espaço amostral finito em que os eventos elementares são igualmente prováveis, pois estamos supondo que o dado seja honesto. Sabemos que $n(\Omega) = 6$ e também que o evento de interesse é $A = \{5, 6\}$. Logo, $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ♦♦

EXEMPLO 4.2 Carta de um baralho

Considere um baralho usual composto de 52 cartas divididas em 4 naipes: ouros, copas, paus e espadas, cada naipe com 13 cartas. As cartas dos 2 primeiros naipes são *vermelhas* e as dos dois últimos naipes, *pretas*. Em cada naipe, as cartas podem ser Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valete, Dama e Rei. Essas três últimas são *figuras* que representam a realeza. Retirando-se ao acaso uma carta desse baralho, qual é a probabilidade de que seja uma figura? Uma carta preta?

Solução:

Temos um espaço amostral finito em que os eventos elementares são igualmente prováveis, pois estamos retirando a carta aleatoriamente. Como há 52 cartas ao todo, $n(\Omega) = 52$. Vamos denotar por F o evento “carta retirada é uma figura” e por P o evento “carta retirada é preta”. Em cada um dos 4 naipes há três figuras. Logo, o número total de figuras é 4×3 , ou seja, $n(F) = 12$. Logo, a probabilidade de retirarmos uma figura é

$$P(F) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

Metade das cartas é de cor preta; logo, a probabilidade de que a carta seja preta é

$$P(P) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}.$$

**EXEMPLO 4.3** *Escolha de um número*

Um número é escolhido entre os 20 primeiros inteiros, 1 a 20. Qual é a probabilidade de que o número escolhido seja (i) par? (ii) primo? (iii) quadrado perfeito?

Solução:

Temos um espaço amostral finito com eventos elementares equiprováveis, pois estamos escolhendo o número aleatoriamente. Vamos denotar por P o evento “número par”, por R o evento “número primo” e por Q o evento “quadrado perfeito”. Então,

$$\begin{aligned} P &= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \Rightarrow P(P) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \\ R &= \{1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \Rightarrow P(R) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \\ Q &= \{1, 4, 9, 16\} \Rightarrow P(Q) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

**EXEMPLO 4.4** *Bolas em uma urna*

Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 8 bolas verdes. Uma bola é escolhida ao acaso desta urna. Qual é a probabilidade de que

- (a) a bola não seja verde?
- (b) a bola seja branca?
- (c) a bola não seja nem branca nem verde?

Solução:

Temos um total de $6 + 2 + 8 = 16$ bolas. Logo, $n(\Omega) = 16$. Vamos denotar por P, B, V os eventos bola preta, branca e verde, respectivamente.

- (a) Queremos a probabilidade de $\overline{V}$, ou seja, do complementar de V .

$$P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 1 - \frac{8}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

(b)

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

(c) Se a bola não é branca nem verde, ela tem que ser preta. Note que estamos pedindo $P(\overline{B} \cap \overline{V})$. Pela lei de De Morgan e pela Propriedade 2 e Axioma III, temos que

$$\begin{aligned} P(\overline{B} \cap \overline{V}) &= P(\overline{B \cup V}) = 1 - P(B \cup V) \\ &= 1 - [P(B) + P(V)] = 1 - \frac{2}{16} - \frac{8}{16} = \frac{6}{16} \\ &= \frac{3}{8} = P(P) \end{aligned}$$



EXEMPLO 4.5 Lançamento de dois dados

Consideremos novamente o lançamento de dois dados. Vamos definir os seguintes eventos: A = “soma das faces par”, B = “soma das faces maior que 9”, C = “soma das faces ímpar menor que 9”. Vamos calcular a probabilidade de tais eventos.

Solução:

A visualização do espaço amostral desse experimento pode ser vista na tabela a seguir, onde, para cada par possível de resultados, apresentamos também a soma das faces:

		Dado 2					
		1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	(1, 1) → 2	(1, 2) → 3	(1, 3) → 4	(1, 4) → 5	(1, 5) → 6	(1, 6) → 7
	2	(2, 1) → 3	(2, 2) → 4	(2, 3) → 5	(2, 4) → 6	(2, 5) → 7	(2, 6) → 8
	3	(3, 1) → 4	(3, 2) → 5	(3, 3) → 6	(3, 4) → 7	(3, 5) → 8	(3, 6) → 9
	4	(4, 1) → 5	(4, 2) → 6	(4, 3) → 7	(4, 4) → 8	(4, 5) → 9	(4, 6) → 10
	5	(5, 1) → 6	(5, 2) → 7	(5, 3) → 8	(5, 4) → 9	(5, 5) → 10	(5, 6) → 11
	6	(6, 1) → 7	(6, 2) → 8	(6, 3) → 9	(6, 4) → 10	(6, 5) → 11	(6, 6) → 12

Podemos ver que :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow n(\Omega) = 36$$

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = 18$$

$$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow n(B) = 6$$
$$C = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), \\ (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (6, 1), \end{array} \right\} \Rightarrow n(C) = 12$$

Logo,

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

**EXEMPLO 4.6** *Bolas de uma urna*

Em uma urna há 4 bolas brancas e 3 bolas verdes. Duas bolas são retiradas dessa urna, seqüencialmente e sem reposição. Qual é a probabilidade de obtermos

- (a) 2 bolas brancas?
- (b) 2 bolas verdes?
- (c) 2 bolas de cores diferentes?

Solução:

Vamos indicar por B_1, B_2, B_3 e B_4 as quatro bolas brancas e por V_1, V_2 e V_3 as três bolas verdes. O espaço amostral para este experimento é

$$\Omega = \{(C_1, C_2); \quad C_1, C_2 = B_1, B_2, B_3, B_4, V_1, V_2, V_3; \quad C_1 \neq C_2\}$$

A primeira bola pode ser qualquer uma; logo, há 7 bolas possíveis. Como a extração é sem reposição, para a segunda bola só há 6 possibilidades. Assim, o número total de pares é $7 \times 6 = 42$.

- (a) O evento $A =$ “2 bolas brancas” é

$$A = \left\{ \begin{array}{l} B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_1, B_2B_3, B_2B_4, \\ B_3B_1, B_3B_2, B_3B_4, B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3 \end{array} \right\}$$

$$\text{Logo, } P(A) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

- (b) O evento $B =$ “2 bolas verdes” é

$$B = \{V_1V_2, V_1V_3, V_2V_1, V_2V_3, V_3V_1, V_3V_2\}$$

$$\text{Logo, } P(B) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

- (c) O evento $C = \text{“bolas de cores diferentes”}$ é o complementar do evento $D = \text{“bolas de cores iguais”}$. Por sua vez, $D = A \cup B$ e como A e B são mutuamente exclusivos, $P(D) = P(A) + P(B) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$. Logo, $P(C) = 1 - P(D) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

Note o trabalho que dá listar todos os elementos de um evento!



EXEMPLO 4.7 *Extração de bolas de uma urna*

É interessante notar o seguinte fato sobre a extração das bolas: em vez de fazermos extrações sequenciais, podemos retirar 2 bolas simultaneamente. Em ambos os casos, as extrações são sem reposição, ou seja, a mesma bola não pode sair duas vezes. O que muda, então?

Solução

Nas extrações simultâneas, não podemos diferenciar a ordem das bolas; por exemplo, os pares V_1V_2 e V_2V_1 são os mesmos. Dessa forma, a cardinalidade do espaço amostral fica reduzida por 2, que é $2!$, número de maneiras de organizar as 2 bolas. Se fossem 3 bolas, ficaria reduzido por $3! = 6$. Para ajudar na compreensão dessa diferença, vamos listar o espaço amostral nos dois casos, bem como os eventos que estudamos.

Evento	Extrações sequenciais	Evento	Extrações simultâneas
2 bolas brancas	$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_1, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_1, B_3B_2, B_3B_4, B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3,$	2 bolas brancas	$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_4,$
2 bolas verdes	$V_1V_2, V_1V_3, V_2V_1, V_2V_3, V_3V_1, V_3V_2,$	2 bolas verdes	$V_1V_2, V_1V_3, V_2V_3,$
Branca e verde	$B_1V_1, B_1V_2, B_1V_3, B_2V_1, B_2V_2, B_2V_3, B_3V_1, B_3V_2, B_3V_3, B_4V_1, B_4V_2, B_4V_3,$	Uma branca e uma verde	$B_1V_1, B_1V_2, B_1V_3, B_2V_1, B_2V_2, B_2V_3, B_3V_1, B_3V_2, B_3V_3, B_4V_1, B_4V_2, B_4V_3$
Verde e branca	$V_1B_1, V_1B_2, V_1B_3, V_1B_4, V_2B_1, V_2B_2, V_2B_3, V_2B_4, V_3B_1, V_3B_2, V_3B_3, V_3B_4$		

Note que as probabilidades são as mesmas em ambos os casos:

	P(2 verdes)	P(2 brancas)	P(cores diferentes)
Extrações sequenciais	$\frac{6}{42} = \frac{1}{7}$	$\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$	$\frac{24}{42} = \frac{4}{7}$
Extrações simultâneas	$\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$	$\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$	$\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$



EXEMPLO 4.8 *Diferença simétrica*

Prove que:

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Lembre-se que a afirmação trata da probabilidade de que *exatamente um* dos eventos A ou B ocorre.

Solução:

Pela Propriedade 3, temos que

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Somando essas igualdades termo a termo, obtém-se que:

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como $A \cap \bar{B}$ e $\bar{A} \cap B$ são mutuamente exclusivos, a soma de suas probabilidades é a probabilidade da sua união, ou seja,

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$$

Logo,

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

**EXEMPLO 4.9** *Questões certas em uma prova prova*

Em uma prova caíram dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 acertaram apenas um.

- (a) Quantos alunos não acertaram qualquer problema?
- (b) Quantos alunos acertaram apenas o segundo problema?

Solução:

Vamos denotar por P_1 e P_2 os eventos “acertar problema 1” e “acertar problema 2” respectivamente. Os dados do problema nos dão que:

$$\begin{aligned} n(P_1 \cap P_2) &= 120 && \text{(acertar os 2)} \\ n(P_1) &= 132 && \text{(acertar o primeiro)} \\ n(\bar{P}_2) &= 86 && \text{(errar o segundo)} \\ n[(P_1 \cap \bar{P}_2) \cup (\bar{P}_1 \cap P_2)] &= 54 && \text{(acertar apenas um)} \end{aligned}$$

Usando o resultado do exemplo anterior, tem-se que

$$\begin{aligned}n \left[(P_1 \cap \overline{P_2}) \cup (\overline{P_1} \cap P_2) \right] &= n(P_1) + n(P_2) - 2n(P_1 \cap P_2) \Rightarrow \\54 &= 132 + n(P_2) - 2 \times 120 \Rightarrow \\n(P_2) &= 162\end{aligned}$$

Logo, o número total de alunos é

$$n(\Omega) = n(P_2 \cup \overline{P_2}) = n(P_2) + n(\overline{P_2}) = 162 + 86 = 248$$

(a) Pela lei de De Morgan, tem-se que

$$\begin{aligned}P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2}) &= P(\overline{P_1 \cup P_2}) = 1 - P(P_1 \cup P_2) = \\&= 1 - [P(P_1) + P(P_2) - P(P_1 \cap P_2)] = \\&= 1 - \frac{132}{248} - \frac{162}{248} + \frac{120}{248} \\&= \frac{74}{248} = \frac{37}{124}\end{aligned}$$

(b) Pela Propriedade 3, tem-se que:

$$P(P_2 \cap \overline{P_1}) = P(P_2) - P(P_1 \cap P_2) = \frac{162 - 120}{248} = \frac{42}{248} = \frac{21}{124}$$



EXEMPLO 4.10 *Atribuição de probabilidade*

Dado que $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, verifique se é possível definir uma medida de probabilidade em Ω tal que

$$\begin{aligned}P(\{-1, 1\}) &= 0,6 \\P(\{0, 1\}) &= 0,9 \\P(\{-1, 0\}) &= 0,5\end{aligned}$$

Justifique sua resposta.

Solução:

Note que o evento $\{-1, 1\} = \{-1\} \cup \{1\}$. Logo, as probabilidades dadas se transformam no seguinte sistema de 3 equações com 3 incógnitas:

$$\begin{aligned}P(-1) + P(1) &= 0,6 \\P(0) + P(1) &= 0,9 \\P(-1) + P(0) &= 0,5\end{aligned}$$

Da primeira equação, obtemos que $P(1) = 0,6 - P(-1)$. Substituindo na segunda, obtemos o seguinte sistema de 2 equações e 2 incógnitas:

$$\begin{aligned}P(0) + 0,6 - P(-1) &= 0,9 \\P(-1) + P(0) &= 0,5\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}P(0) - P(-1) &= 0,3 \\P(0) + P(-1) &= 0,5\end{aligned}$$

Somando termo a termo, resulta que

$$2 \times P(0) = 0,8 \Rightarrow P(0) = 0,4$$

Substituindo, obtemos que

$$P(-1) = 0,5 - P(0) = 0,5 - 0,4 \Rightarrow P(-1) = 0,1$$

Substituindo novamente, obtemos

$$P(1) = 0,6 - P(-1) = 0,6 - 0,1 = 0,5$$

Como todos os valores obtidos estão no intervalo $(0,1)$, a atribuição dada é válida.



4.5 Exercícios propostos

4.1 Dados $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, calcule:

(a) $P(C)$

(b) $P(A \cup B)$

(c) $P(\overline{A})$

(d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

(e) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

4.2 Se $P(A) = 1/3$ e $P(\overline{B}) = 1/4$, A e B podem ser mutuamente exclusivos?

4.3 Sejam A e B eventos mutuamente exclusivos tais que $P(A) = 0,5$ e $P(B) = 0,4$.

(a) Calcule $P(A \cup B)$.

(b) Calcule $P(B \cap \bar{A})$.

4.4 Em um arquivo há 4 balancetes de orçamento e 3 balancetes de custos. Em uma auditoria, o auditor seleciona aleatoriamente um destes balancetes. Qual é a probabilidade de que seja um balancete de custos? E de orçamento?

4.5 Considere a situação anterior, só que agora o auditor retira seqüencialmente 2 balancetes sem reposição. Qual é a probabilidade de serem sorteados (i) 2 balancetes de custos? (ii) 2 balancetes de orçamento? (iii) 2 balancetes de tipos diferentes?

4.6 Em um grupo de 23 homens, há (a) 2 médicos pediatras, paulistas, recém- formados; (b) 12 médicos recém- formados; (c) 13 médicos pediatras; (d) 11 médicos paulistas; (e) 4 médicos pediatras que não são paulistas nem recém- formados; (f) 5 médicos recém- formados que não são paulistas nem pediatras; (g) 3 médicos paulistas que não são recém formados e nem pediatras. Sorteia-se um homem desse grupo. Qual é a probabilidade de que seja paulista recém formados, mas não pediatra?

4.7 Sejam A e B eventos mutuamente exclusivos em Ω tais que $P(A) = 0,5$ e $P(B) = 0,3$. Calcule a probabilidade de

(a) ocorrer pelo menos um dos eventos A e B ;

(b) ocorrer A mas não ocorrer B ;

(c) A e B ocorrerem.

4.8 Se $P[A \cap (B \cup C)] = 0,2$, $P(\bar{A}) = 0,6$ e $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 0,1$, calcule $P(B \cup C)$.

4.9 Demonstre, por indução completa, que é verdadeira a desigualdade de Bonferroni:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n - 1)$$

Capítulo 5

Probabilidade condicional e independência de eventos

5.1 Introdução

Consideremos o lançamento de um dado equilibrado. Já vimos que o espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Considere o evento $A = \text{“sair face 2”}$. Se não temos qualquer informação além de o dado ser equilibrado, vimos que $P(A) = \frac{1}{6}$.

Suponhamos, agora, que o dado tenha sido lançado e a seguinte informação fornecida: “saiu face par”. Qual é a probabilidade de ter saído face 2? Note a diferença: agora nós temos uma informação parcial sobre o experimento e devemos usá-la para reavaliar a nossa estimativa. Mais precisamente, sabemos que ocorreu o evento $B = \text{“face par”}$. Com essa informação, podemos nos concentrar no evento $B = \{2, 4, 6\}$, uma vez que as faces 1, 3, 5 ficam descartadas em função da informação dada. Dentro dessas três possibilidades, a probabilidade do evento A passa a ser $\frac{1}{3}$. Calculamos, assim, a probabilidade do evento A , sabendo que ocorreu o evento B . Essa probabilidade será denotada $P(A|B)$ (lê-se probabilidade de A dado B).

Consideremos, agora, o lançamento de dois dados equilibrados e os eventos $A = \text{“soma das faces é par”}$ e $B = \text{“soma das faces é maior ou igual a 9”}$. Se sabemos que ocorreu B , qual é a probabilidade de ter ocorrido A ? Queremos calcular $P(A|B)$. Temos que

$$A = \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \right. \\ \left. (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \right\} \\ B = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Se ocorreu B , a única chance de ter ocorrido A é que tenha ocorrido o evento

$$A \cap B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)\}$$

e, nesse caso, a probabilidade é $\frac{4}{10}$, ou seja,

$$P(A|B) = \frac{4}{10} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esses dois exemplos ilustram o fato geral que está exibido na **Figura 5.1**: se sabemos que aconteceu o evento B , esse evento passa a ser o “novo espaço amostral” e nesse novo espaço amostral, a única parte de A presente é $A \cap B$ – parte sombreada mais escura.

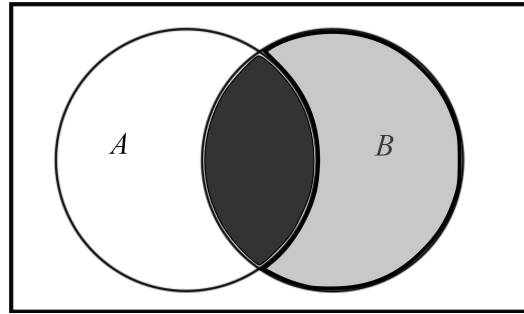


Figura 5.1 – Probabilidade condicional $P(A|B)$.

Com esses exemplos, estamos ilustrando uma situação comum, onde temos que calcular a probabilidade de um evento tendo uma *informação parcial*. Esse é o conceito de *probabilidade condicional*.

DEFINIÇÃO Probabilidade condicional

A **probabilidade condicional** do evento A dada a ocorrência do evento B é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (5.1)$$

Note que, nessa definição, temos que supor que o evento B é um evento possível, já que ele ocorreu. Logo, é óbvio que $P(B) > 0$.

EXEMPLO 5.1 Alunos

Um grupo de 100 alunos foi classificado quanto ao sexo e à atividade de lazer preferida, obtendo-se a distribuição dada na tabela abaixo.

Sexo	Atividade de lazer			Total
	Cinema	Praia	Esporte	
Masculino	10	12	13	20
Feminino	15	41	9	80
Total	25	53	22	100

- (a) Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso neste grupo ser do sexo masculino?
- (b) Se a pessoa escolhida prefere a praia como atividade de lazer, qual é a probabilidade de que seja um homem?

Solução:

Vamos definir os seguintes eventos: M = “masculino”; F = “feminino”; C = “cinema”; P = “praia”; E = “esporte”.

Note que, como o sorteio é aleatório, estamos num caso de espaço amostral finito e equiprovável, ou seja, podemos usar a definição clássica.

- (a) O problema pede $P(M)$. Como há 20 homens dentre as 100 pessoas, temos que

$$P(M) = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$$

- (b) O problema pede $P(M|P)$. Por definição,

$$P(M|P) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{53}{100}} = \frac{12}{53}$$

Note que a probabilidade do evento “aluno do sexo masculino” se modifica quando sabemos que a pessoa prefere a praia como atividade de lazer, isto é: $P(M|P) \neq P(M)$.

**EXEMPLO 5.2** *Baralho*

De um baralho de 52 cartas, extrai-se uma ao acaso. Defina os eventos C = “carta é de copas” e R = “carta é um rei”. Calcule $P(C)$, $P(R)$, $P(C \cap R)$, $P(C|R)$.

Solução:

$$P(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(C \cap R) = \frac{1}{52}$$

$$P(C|R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = P(C)$$

Neste caso, a probabilidade do evento C não se modifica quando sabemos da ocorrência do evento R , isto é, $P(C|R) = P(C)$.



EXEMPLO 5.3 *Plano de aposentadoria de funcionários*

De um total de 500 empregados, 200 possuem plano pessoal de aposentadoria complementar, 400 contam com o plano de aposentadoria complementar oferecido pela empresa e 200 empregados possuem ambos os planos. Sorteia-se aleatoriamente um empregado dessa empresa.

- Qual é a probabilidade de que ele tenha algum plano de aposentadoria complementar?
- Qual é a probabilidade de que ele não possua qualquer plano de aposentadoria complementar?
- Se o empregado conta com o plano de aposentadoria complementar oferecido pela empresa, qual é a probabilidade de que ele tenha plano pessoal de aposentadoria complementar?
- Se o empregado tem plano pessoal de aposentadoria complementar, qual é a probabilidade de que ele conte com o plano de aposentadoria complementar da empresa?

Solução:

Vamos denotar por E o evento “empregado tem o plano aposentadoria complementar da empresa” e por P o evento “empregado possui plano pessoal de aposentadoria complementar”. O problema diz que

$$P(P) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5} \quad P(E) = \frac{400}{500} = \frac{4}{5} \quad P(P \cap E) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$$

Note que essas informações podem ser dispostas no formato de tabela da seguinte forma:

		Plano pessoal		Total
		Sim	Não	
Plano da Empresa	Sim	200	200	400
	Não	0	100	100
Total		200	300	500

Os números em negrito são as informações dadas no problema; o restante é calculado observando-se os totais de linha e de coluna.

- O problema pede

$$P(P \cup E) = P(P) + P(E) - P(P \cap E) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

- O problema pede

$$P(\overline{P} \cap \overline{E}) = P(\overline{P \cup E}) = 1 - P(P \cup E) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

(c) O problema pede

$$P(P|E) = \frac{P(P \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$$

(d) O problema pede

$$P(E|P) = \frac{P(P \cap E)}{P(P)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = 1$$



5.2 Probabilidade condicional como lei de probabilidade

É interessante notar que a probabilidade condicional definida acima *realmente* define uma lei de probabilidade, ou seja, a função que associa a cada evento A de Ω o número $P(A|B)$ satisfaz os axiomas de probabilidade. De fato:

- Axioma 1:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$$

pois $P(A \cap B) \geq 0$ e $P(B) > 0$.

- Axioma 2:

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Na verdade, como $P(B|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$, toda a probabilidade condicional está concentrada em B , o que justifica considerarmos B como o novo espaço amostral para essa nova lei de probabilidade.

- Axioma 3:

Sejam A_1 e A_2 dois eventos mutuamente exclusivos (veja a **Figura 5.2**). Usando a propriedade distributiva, temos que

$$P(A_1 \cup A_2|B) = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)}$$

Mas, como A_1 e A_2 são mutuamente exclusivos, resulta que $(A_1 \cap B)$ e $(A_2 \cap B)$ também o são – esses dois eventos correspondem à parte sombreada da figura 5.2. Logo,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \\ &= P(A_1|B) + P(A_2|B) \end{aligned}$$

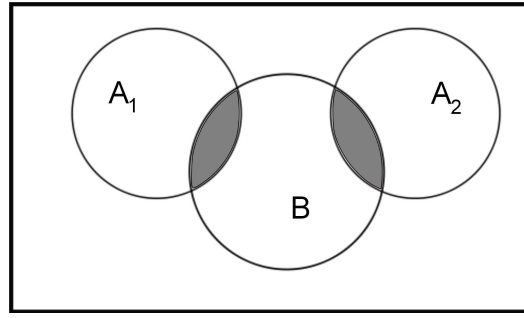


Figura 5.2 – Axioma 3 da probabilidade condicional

Sendo a probabilidade condicional uma lei de probabilidade, todas as propriedades vistas anteriormente, que eram consequências dos axiomas, valem também para a probabilidade condicional.

- Propriedade 1:

$$P(\emptyset|B) = \frac{P(\emptyset \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$$

- Propriedade 2:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}|B) &= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \setminus A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B) \end{aligned}$$

- Propriedade 3:

$$\begin{aligned} P[(A_1 \setminus A_2) | B] &= P(A_1 \cap \bar{A}_2 | B) \\ &= \frac{P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B \cap \bar{A}_2)}{P(B)} \\ &= \frac{P[(A_1 \cap B) \setminus A_2]}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B) - P(A_1 \cap B \cap A_2)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A_1 \cap B \cap A_2)}{P(B)} \\ &= P(A_1|B) - \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)} \\ &= P(A_1|B) - P[(A_1 \cap A_2) | B] \end{aligned}$$

- Propriedade 4:

$$\begin{aligned}P[(A_1 \cup A_2) | B] &= \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} \\&= \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)} \\&= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) - P(A_1 \cap B \cap A_2 \cap B)}{P(B)} \\&= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)} \\&= P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P[(A_1 \cap A_2) | B]\end{aligned}$$

- Propriedade 5:

$$\begin{aligned}A_2 &\subset A_1 \Rightarrow A_1 \cap A_2 = A_2 \Rightarrow \\P[(A_1 \setminus A_2) | B] &= P(A_1 | B) - P[(A_1 \cap A_2) | B] \Rightarrow \\P[(A_1 \setminus A_2) | B] &= P(A_1 | B) - P(A_2 | B) \Rightarrow \\P(A_1 | B) - P(A_2 | B) &\geq 0 \Rightarrow P(A_2 | B) \leq P(A_1 | B)\end{aligned}$$

- Propriedade 6:

$$\begin{aligned}A \cap B &\subset B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \Rightarrow \\ \frac{P(A \cap B)}{P(B)} &\leq 1 \Rightarrow P(A | B) \leq 1\end{aligned}$$

Observação importante

Note que a definição de probabilidade condicional está vinculada ao evento B em que estamos condicionando, ou seja, se condicionarmos em um outro evento C , estaremos definindo uma outra função de probabilidade – a função de probabilidade condicional em C .

5.3 Regra geral da multiplicação

A definição de probabilidade condicional leva a um resultado importante, conhecido como *regra da multiplicação*.

! Regra da multiplicação para 2 eventos

Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω . Então

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(B) P(A|B) \\ P(A) P(B|A) \end{cases} \quad (5.2)$$

Esse resultado nos permite calcular a probabilidade da interseção de dois eventos e é muito útil para modelar experimentos que têm caráter sequencial, isto é, que são executados em etapas, uma seguida da outra. Em tais situações, pode ser de ajuda desenhar um *diagrama de árvore* para ilustrar os eventos em questão. Vamos ver alguns exemplos.

EXEMPLO 5.4 *Cartas de um baralho*

Considere que duas cartas de um baralho (13 cartas de cada um dos naipes copas, paus, ouro, espada) sejam extraídas sem reposição, uma depois da outra. Qual é a probabilidade de nenhuma das duas ser de copas?

Solução:

Para solucionar esse problema, devemos notar que, em cada extração, as cartas no baralho são igualmente prováveis. Vamos definir os seguintes eventos:

C_1 = copas na primeira extração

C_2 = copas na segunda extração

Queremos calcular $P(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2)$. Pela regra da multiplicação, temos que

$$P(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2) = P(\overline{C}_1) P(\overline{C}_2|\overline{C}_1)$$

Na primeira extração, temos 39 cartas que não são de copas, em um baralho de 52. Na segunda extração, dado que na primeira não saiu copas, temos 38 cartas que não são copas em um baralho de 51. Logo,

$$P(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2) = P(\overline{C}_1) P(\overline{C}_2|\overline{C}_1) = \frac{39}{52} \times \frac{38}{51}$$

Veja a **Figura 5.3**, onde temos o diagrama de árvore para esse problema. Cada nó na árvore corresponde à ocorrência de um evento condicionada à ocorrência de todos os eventos representados pelos nós anteriores no caminho correspondente. Assim, a parte superior da árvore

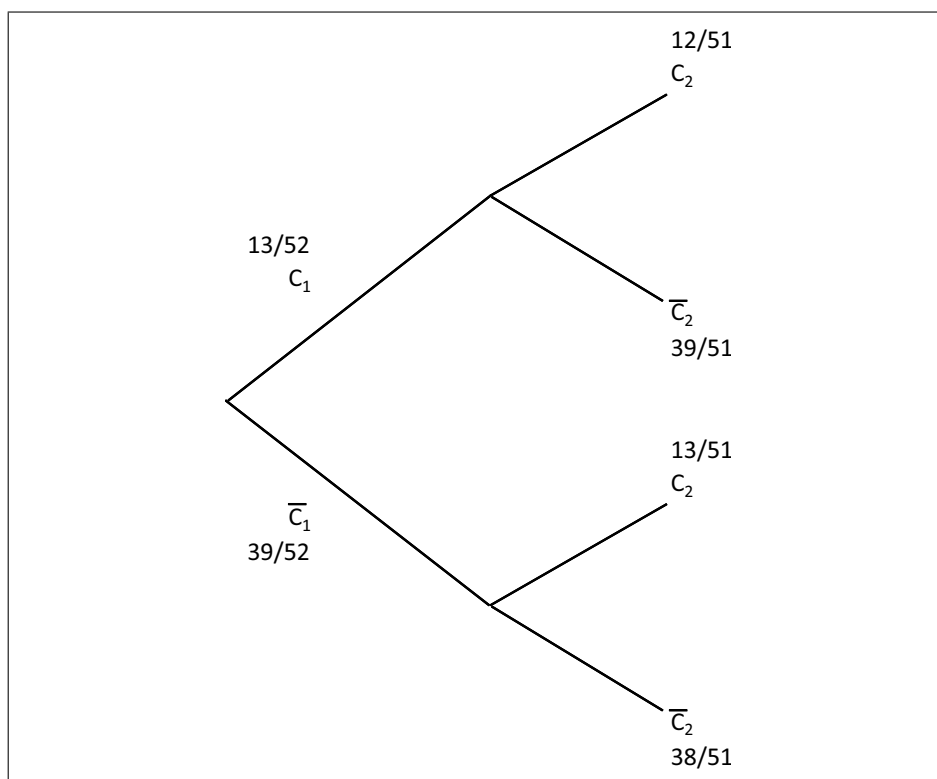


Figura 5.3 – Diagrama de árvore para o experimento de extração de 2 cartas sem reposição

corresponde à ocorrência de copas na primeira extração - evento C_1 - e a parte inferior à não ocorrência de copas na primeira extração - evento $\overline{C}_1$.

Continuando com a parte superior, vemos que

$$\begin{aligned} P(C_1) &= \frac{13}{52} \\ P(C_2|C_1) &= \frac{12}{51} \\ P(\overline{C}_2|C_1) &= \frac{39}{51} \end{aligned}$$

Note que, pela lei do complementar, $P(C_2|C_1) + P(\overline{C}_2|C_1) = 1$. Na parte inferior da árvore temos

$$\begin{aligned} P(\overline{C}_1) &= \frac{39}{52} \\ P(C_2|\overline{C}_1) &= \frac{13}{51} \\ P(\overline{C}_2|\overline{C}_1) &= \frac{38}{51} \end{aligned}$$



EXEMPLO 5.5 *Radar*

Se um avião está presente em determinada área, um radar detecta sua presença com probabilidade 0,99. No entanto, se o avião não está presente, o radar detecta erradamente a presença de um avião com probabilidade 0,02. A probabilidade de um avião estar presente nesta área é de 0,05. Qual é a probabilidade de um falso alarme? Qual é a probabilidade de o radar deixar de detectar um avião? (Note que esses são os dois erros possíveis nesta situação.)

Solução:

Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} A &= \text{“avião presente”} \\ D &= \text{“radar detecta presença de avião”} \end{aligned}$$

Os eventos complementares são:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \text{“avião não está presente”} \\ \bar{D} &= \text{“radar não detecta avião”} \end{aligned}$$

O problema nos dá as seguintes informações:

$$P(D|A) = 0,99 \quad P(D|\bar{A}) = 0,02 \quad P(A) = 0,05$$

Pela lei do evento complementar, temos que

$$P(\bar{D}|A) = 0,01 \quad P(\bar{D}|\bar{A}) = 0,98 \quad P(\bar{A}) = 0,95$$

O problema pede

$$\begin{aligned} P(D|\bar{A}) & \quad \text{falso alarme} \\ P(\bar{D}|A) & \end{aligned}$$

Na **Figura 5.4** temos a ilustração desse experimento.

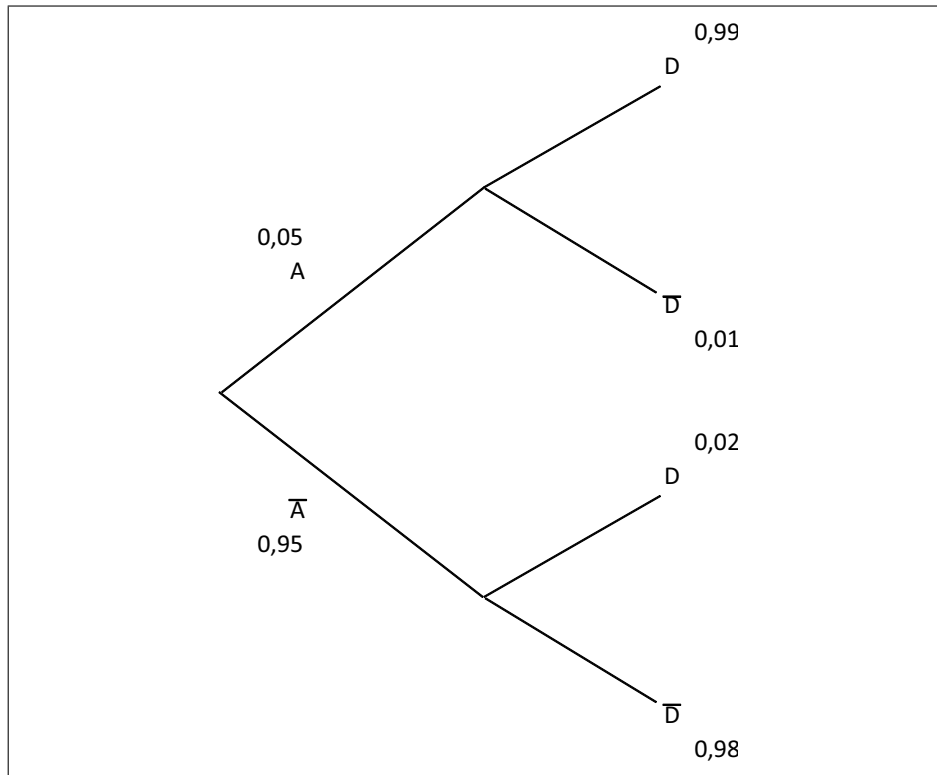
Daí podemos ver que as probabilidades pedidas são:

$$P(D|\bar{A}) = P(\bar{A}) P(D|\bar{A}) = 0,95 \times 0,02 = 0,019$$

$$P(\bar{D}|A) = P(A) P(\bar{D}|A) = 0,05 \times 0,01 = 0,0005$$

Note que a probabilidade de um erro é a soma dessas probabilidades.

**EXEMPLO 5.6** *Extração de 3 cartas*

**Figura 5.4** – Diagrama de árvore para o exemplo do radar

Consideremos, agora, a extração de 3 cartas sem reposição, onde estamos interessados no mesmo evento “nenhuma carta de copas”. Queremos $P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3)$. Como generalizar a regra da multiplicação para esse caso? Usando um recurso algébrico, podemos escrever (note que os termos se cancelam):

$$\begin{aligned}
 P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3) &= P(\bar{C}_1) \times \frac{P(\bar{C}_2 \cap \bar{C}_1)}{P(\bar{C}_1)} \times \frac{P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3)}{P(\bar{C}_2 \cap \bar{C}_1)} = \\
 &= P(\bar{C}_1) \times \frac{P(\bar{C}_2 \cap \bar{C}_1)}{P(\bar{C}_1)} \times \frac{P(\bar{C}_3 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_1)}{P(\bar{C}_2 \cap \bar{C}_1)}
 \end{aligned}$$

Aplicando a definição de probabilidade condicional, resulta que

$$P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3) = P(\bar{C}_1) P(\bar{C}_2 | \bar{C}_1) P(\bar{C}_3 | \bar{C}_2 \cap \bar{C}_1)$$

Voltando ao baralho, temos, como antes, $P(\bar{C}_1) = \frac{39}{52}$ e $P(\bar{C}_2 | \bar{C}_1) = \frac{38}{51}$. Com o mesmo tipo de raciocínio, resulta que $P(\bar{C}_3 | \bar{C}_2 \cap \bar{C}_1) = \frac{37}{50}$. Logo,

$$P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3) = \frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50}$$

Veja a **Figura 5.5**. No diagrama de árvore, o espaço amostral completo é exibido. Algumas probabilidades são:

$$\begin{aligned} P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) &= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = \frac{22}{1700} && \text{ramo 1} \\ P(C_1 \cap \bar{C}_2 \cap C_3) &= \frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{12}{50} = \frac{78}{1700} && \text{ramo 3} \\ P(\bar{C}_1 \cap C_2 \cap \bar{C}_3) &= \frac{39}{52} \times \frac{13}{51} \times \frac{38}{50} = \frac{247}{1700} && \text{ramo 6} \end{aligned}$$

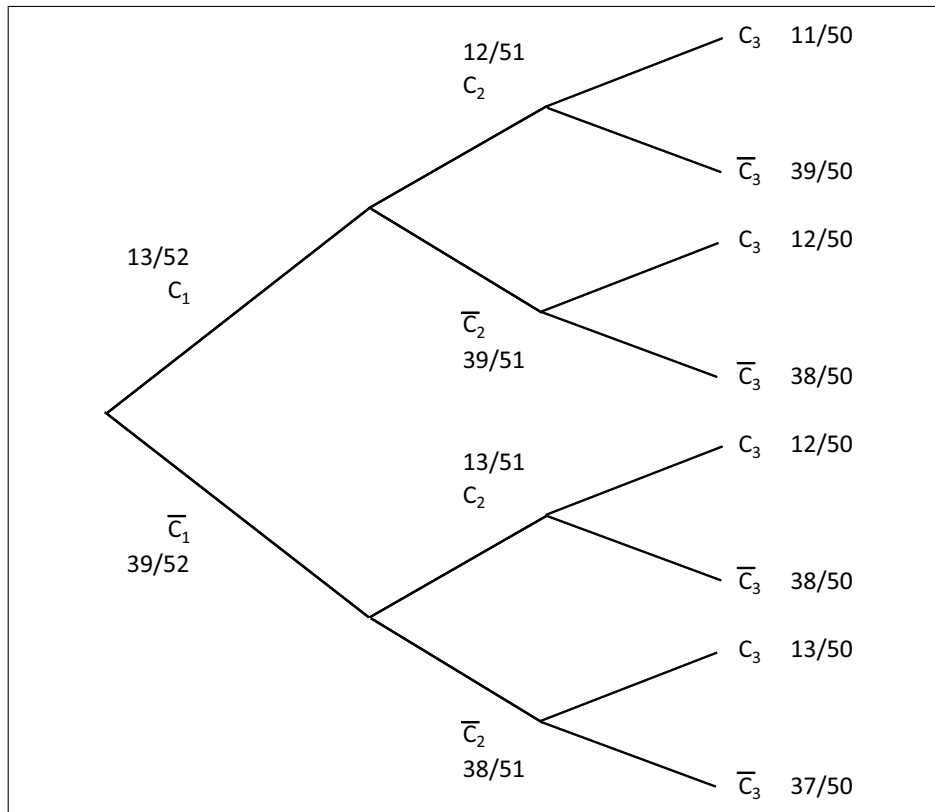


Figura 5.5 – Diagrama de árvore para o experimento de extração de 3 cartas sem reposição



O exemplo anterior ilustra a regra geral de multiplicação.

! Regra geral da multiplicação

Seja $A_1, A_2, \dots, A_n$ uma sequência de eventos de um espaço amostral Ω . Então

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad (5.3)$$

5.4 Independência de eventos

Considere novamente um baralho usual, com 52 cartas, 13 de cada naipe, do qual será retirada uma carta. Vamos definir os seguintes eventos:

C = “carta é de copas”

R = “carta é um rei”

V = “carta é vermelha”

Já vimos que $P(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$; $P(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ e $P(V) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$. Vamos, agora, calcular as seguintes probabilidades condicionais: $P(R|C)$ e $P(V|C)$. No primeiro caso, estamos calculando a probabilidade de sair um rei, dado que a carta é de copas e no segundo caso, estamos calculando a probabilidade de sair uma carta vermelha, dado que saiu uma carta de copas.

$$P(R|C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = P(R)$$

$$P(V|C) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C)}{P(C)} = 1 \neq P(V)$$

No primeiro caso, saber que a carta é de copas não acrescentou informação útil para avaliarmos a probabilidade de sair rei, ou seja, saber, ou não, que saiu copas não altera a probabilidade de sair rei. Já no segundo caso, saber que saiu carta de copas faz com que mudemos a probabilidade de sair carta vermelha. Como podemos ver, se sabemos que saiu carta de copas, então a carta *tem* que ser vermelha.

Estes exemplos ilustram um conceito importante. No primeiro caso, dizemos que os eventos R e C são *independentes* e no segundo caso, os eventos V e C são *dependentes*. No primeiro caso, o conhecimento da ocorrência de C não ajuda para reavaliarmos a probabilidade de C ; no segundo caso, o conhecimento da ocorrência de C faz com que mudemos nossa estimativa da probabilidade de V .

DEFINIÇÃO Eventos independentes

Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω . Então, A e B são **independentes** se

$$P(A|B) = P(A) \tag{5.4}$$

Essa definição tem algumas implicações importantes. A primeira delas é a seguinte:

$$P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(B|A) = P(B)$$

De fato:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \\ &\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B) \Rightarrow \\ P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) P(B)}{P(A)} = P(B) \end{aligned}$$

Isso significa que, se A e B são independentes, então B e A também o são (comutatividade).

A segunda implicação, bastante importante, é a seguinte:

$$A, B \text{ independentes} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Mas a recíproca dessa afirmativa também é verdadeira, ou seja, se $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ então A e B são independentes. De fato:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) P(B) \Rightarrow \\ P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P(B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow \\ &A \text{ e } B \text{ são independentes} \end{aligned}$$

Esse resultado nos permite estabelecer uma outra definição equivalente para a independência de dois eventos.

DEFINIÇÃO Eventos independentes

Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω . Então, A e B são **independentes** se

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) \quad (5.5)$$

EXEMPLO 5.7 Plano de aposentadoria de funcionários - continuação

No exemplo 5.3, analisamos os dados apresentados na tabela a seguir, referentes à participação de funcionários de uma empresa em planos de aposentadoria complementar:

		Plano pessoal		Total
		Sim	Não	
Plano da	Sim	200	200	400
Empresa	Não	0	100	100
Total		200	300	500

Naquele exemplo, estudamos os eventos E = “empregado tem o plano aposentadoria complementar da empresa” e P = “empregado possui plano pessoal de aposentadoria complementar”. Vamos ver se esses eventos são independentes.

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned}P(P) &= \frac{2}{5} \\P(E) &= \frac{4}{5} \\P(P \cap E) &= \frac{2}{5} \neq P(P)P(E)\end{aligned}$$

Logo, os eventos P e E não são independentes. Outra forma de ver isso é

$$P(E|P) = \frac{200}{200} = 1 \neq P(E) = \frac{4}{5}$$



EXEMPLO 5.8 *Equivalência de eventos independentes*

Sejam A e B eventos independentes em um espaço amostral Ω . Prove que os seguintes eventos também são independentes:

(a) $\overline{A}$ e B

(b) $\overline{A}$ e $\overline{B}$

Solução:

(a) Temos que

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Como A e B são independentes, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Logo,

$$\begin{aligned}P(\overline{A} \cap B) &= P(B) \setminus P(A)P(B) \\&= P(B) [1 - P(A)] \\&= P(B)P(\overline{A})\end{aligned}$$

Logo, os eventos $\overline{A}$ e B são independentes.

(b) Pela lei de De Morgan e pela lei do complementar, temos que

$$\begin{aligned}P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\&= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)\end{aligned}$$

Como A e B são independentes, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Logo,

$$\begin{aligned}P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\&= [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)] \\&= [1 - P(A)][1 - P(B)] \\&= P(\overline{A})P(\overline{B})\end{aligned}$$

Logo, $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são independentes.



EXEMPLO 5.9 *Eventos independentes versus eventos mutuamente exclusivos*

Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω tais que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

- (a) Mostre que se A e B são independentes, então A e B não podem ser mutuamente exclusivos.
- (b) Mostre que se A e B são mutuamente exclusivos, então A e B não podem ser independentes.

Solução:

- (a) Como A e B são independentes, sabemos que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) > 0$, pois estamos supondo que A e B são eventos possíveis. Mas $P(A \cap B) > 0$ significa que A e B não são mutuamente exclusivos, o que completa a prova.
- (b) Note que, se A e B são mutuamente exclusivos, saber sobre a ocorrência de um resulta em saber que o outro não ocorrerá. Logo, A e B não podem ser independentes. Provando matematicamente:

$$\left. \begin{array}{l} P(A)P(B) > 0 \\ P(A \cap B) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$$

Logo, A e B não são independentes.



A equação 5.5 nos permite generalizar a definição de independência para qualquer número de eventos.

DEFINIÇÃO Eventos independentes – caso geral

Os eventos $E_1, E_2, \dots, E_n$ são independentes, se, para cada um de seus subconjuntos $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_r}$

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_r}) = P(E_{i_1}) P(E_{i_2}) \dots P(E_{i_r})$$

5.5 Exercícios Propostos

5.1 *Dois dados equilibrados são lançados.*

- (a) *Encontre a probabilidade de saírem faces iguais nos 2 dados.*
- (b) *Sabendo-se que a soma das faces foi menor ou igual a 4, calcule a probabilidade de saírem faces iguais nos 2 dados.*
- (c) *Calcule a probabilidade de sair 5 em pelo menos um dado.*
- (d) *Sabendo-se que saíram faces diferentes nos dois dados, determine a probabilidade de sair 5 em pelo menos um dado.*

5.2 *A probabilidade de que uma nova campanha publicitária fique pronta antes do prazo estipulado pela diretoria foi estimada em 0,60. A probabilidade de que a diretoria aprove essa campanha publicitária é de 0,50. A probabilidade de que ambos os objetivos sejam atingidos é 0,30.*

- (a) *Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos objetivos seja atingido?*
- (b) *Qual é a probabilidade de que nenhum objetivo seja atingido?*
- (c) *Se a campanha ficou pronta antes do prazo estipulado, qual é a probabilidade de que a diretoria a aprove?*

5.3 *Sejam A e B eventos do espaço amostral Ω tais que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.*

- (a) *Calcule $P(A \cup B)$.*
- (b) *Calcule $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.*
- (c) *Calcule $P(A|\overline{B})$.*

5.4 Em uma pesquisa realizada com um grupo de alunos da UFF, constatou-se que 10% dos estudantes não utilizam transporte público para ir às aulas e que 65% dos estudantes que utilizam o transporte público fazem refeições no bandeirão do campus. Seleccionando-se aleatoriamente um estudante deste grupo, calcule a probabilidade de que ele use transporte público e faça refeições no bandeirão.

5.5 As preferências de homens e mulheres por cada gênero de filme alugado em uma locadora de vídeos estão apresentadas na tabela a seguir.

Sexo	Tipo de filme		
	Comédia	Romance	Policia
Masculino	136	92	248
Feminino	102	195	62

Sorteando-se ao acaso um registro de locação, pede-se a probabilidade de:

- (a) ser um filme policial alugado por uma mulher;
- (b) ser uma comédia;
- (c) ser de um homem ou de um romance;
- (d) ser de um filme policial dado que foi alugado por um homem.

5.6 Uma urna contém 6 bolas pretas e 5 bolas amarelas. Extraem-se seqüencialmente 3 bolas dessa urna, sem reposição. Qual é a probabilidade de que as 3 bolas sejam de cores iguais?

5.7 Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω tais que $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = p$ e $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Determine o valor de p para que A e B sejam independentes.

5.8 Volte ao Exercício 5.2. Verifique se os eventos considerados são independentes.

5.9 Sejam A e B eventos de um espaço amostral. Sabe-se que $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,7$ e $P(A \cap B) = 0,21$. Verifique se as seguintes afirmativas são verdadeiras. Justifique sua resposta.

- (a) A e B são mutuamente exclusivos;
- (b) A e B são independentes;
- (c) A e $\overline{B}$ são independentes;
- (d) A e $\overline{B}$ são mutuamente exclusivos;
- (e) A e $\overline{A}$ são independentes.

5.10 *Dois dados equilibrados são lançados.*

- (a) *Calcule a probabilidade de sair 6 em pelo menos um dado.*
- (b) *Sabendo-se que saíram faces diferentes nos dois dados, determine a probabilidade de sair 6 em pelo menos um dado.*
- (c) *Os eventos “seis em pelo menos um dado” e “faces diferentes nos dois dados” são independentes?*

5.11 *Uma sala possui três soquetes para lâmpadas. De uma caixa com 10 lâmpadas, das quais 6 estão queimadas, retiram-se 3 lâmpadas ao acaso, colocando-se as mesmas nos três bocais. Calcular a probabilidade de que:*

- (a) *pelo menos uma lâmpada acenda;*
- (b) *todas as lâmpadas acendam.*

5.12 *O Ministério da Economia da Espanha acredita que a probabilidade da inflação ficar abaixo de 3% este ano é de 0,20; entre 3% e 4% é de 0,45 e acima de 4% é de 0,35. O Ministério acredita que, com inflação abaixo de 3%, a probabilidade de se criar mais 200.000 empregos é de 0,6, diminuindo essa probabilidade para 0,3 caso a inflação fique entre 3% e 4%; no entanto, com inflação acima de 4%, isso é totalmente impossível. Qual é a probabilidade de se criarem 200.000 empregos nesse ano?*

5.13 *Na urna I há 5 bolas vermelhas, 3 brancas e 8 azuis. Na urna II há 3 bolas vermelhas e 5 brancas. Lança-se um dado equilibrado. Se sair 3 ou 6, escolhe-se uma bola da urna I; caso contrário, escolhe-se uma bola da urna II. Calcule a probabilidade de*

- (a) *sair uma bola vermelha;*
- (b) *sair uma bola branca;*
- (c) *sair uma bola azul.*

5.14 *Joana quer enviar uma carta a Camila. A probabilidade de que Joana escreva a carta é $\frac{8}{10}$. A probabilidade de que o correio não a perca é $\frac{9}{10}$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é também $\frac{9}{10}$.*

- (a) *Construa o diagrama de árvore representando o espaço amostral deste problema.*
- (b) *Calcule a probabilidade de Camila não receber a carta.*

5.15 Sejam A e B dois eventos tais que $P(A) = 0,4$ e $P(A \cup B) = 0,7$. Seja $P(B) = p$. Determine o valor de p para que

9a) A e B sejam mutuamente exclusivos;

9b) A e B sejam independentes.

5.16 Sejam A e B eventos possíveis de um mesmo espaço amostral Ω . Se $P(\bar{A}|B) = 1$ verifique a veracidade das seguintes afirmativas, justificando sua resposta.

(a) A e B são independentes.

(b) A e B são mutuamente exclusivos.

5.17 Sejam A , B , C eventos de um mesmo espaço amostral. Sabe-se que (i) B é um subconjunto de A ; (ii) A e C são independentes e (iii) B e C são mutuamente exclusivos. A probabilidade do complementar da união dos eventos A e C é $0,48$; a probabilidade da união dos eventos B e C é $0,3$ e a probabilidade do evento C é o dobro da probabilidade do evento B . Calcule a probabilidade da união de A e B .

5.18 Uma comissão de dois estudantes deve ser sorteada de um grupo de 5 alunas e 3 alunos. Sejam os eventos:

$M_1 =$ “primeiro estudante sorteado é mulher”

$M_2 =$ “segundo estudante sorteado é mulher”

(a) Construa um diagrama de árvore que represente o espaço amostral deste experimento, indicando as probabilidades.

(b) Calcule $P(M_1)$ e $P(M_2)$.

(c) Verifique se M_1 e M_2 são independentes.

5.19 Em um campeonato de natação, estão competindo três estudantes: Alberto, Bosco e Carlos. Alberto e Bosco têm a mesma probabilidade de ganhar, que é o dobro da de Carlos ganhar.

(a) Ache a probabilidade de que Bosco ou Carlos ganhe a competição.

(b) Que hipótese você fez para resolver essa questão? Essa hipótese é razoável?

5.20 Solicita-se a dois estudantes, Maria e Pedro, que resolvam determinado problema. Eles trabalham na solução do mesmo independentemente, e têm, respectivamente, probabilidade $0,8$ e $0,7$ de resolvê-lo.

- (a) Qual é a probabilidade de que nenhum deles resolva o problema?
- (b) Qual é a probabilidade do problema ser resolvido?
- (c) Dado que o problema foi resolvido, qual é a probabilidade de que tenha sido resolvido apenas por Pedro?

5.21 Joga-se um dado duas vezes. Considere os seguintes eventos: $A =$ “resultado do primeiro lançamento é par” e $B =$ “soma dos resultados é par”. A e B são independentes? Justifique.

5.22 Um aluno responde a uma questão de múltipla escolha com 4 alternativas, com uma só correta. A probabilidade de que ele saiba a resposta certa da questão é de 30%. Se ele não sabe a resposta, existe a possibilidade de ele acertar “no chute”. Não existe a possibilidade de ele obter a resposta certa por “cola”. Qual é a probabilidade de ele acertar a questão?

Capítulo 6

Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Neste capítulo, você estudará dois importantes teoremas de probabilidade e verá suas aplicações em diversas situações envolvendo a tomada de decisão. Esses teoremas, conhecidos como teorema da probabilidade total e teorema de Bayes, resultam diretamente da definição de probabilidade condicional e das propriedades vistas para a probabilidade.

A apresentação desses teoremas será feita inicialmente através de exemplos, para que você compreenda bem o contexto de sua aplicação. Ao final, será apresentada a formulação geral dos teoremas, que requer a seguinte definição.

DEFINIÇÃO Partição de um espaço amostral

Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são eventos em um espaço amostral Ω tais que

$$1. A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$2. \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

então, diz-se que $A_1, A_2, \dots, A_n$ formam uma **partição** de Ω .

EXEMPLO 6.1 *Produção de peças em duas máquinas*

Em uma linha de produção de uma certa fábrica, determinada peça é produzida em duas máquinas. A máquina 1, mais antiga, é responsável por 35% da produção e os 65% restantes vêm da máquina 2. A partir dos dados passados e das informações do fabricante das máquinas, estima-se em 5% a proporção de peças defeituosas produzidas pela máquina 1 e em 2,5% a

proporção de defeituosas produzidas pela máquina 2. As peças produzidas pelas duas máquinas seguem para o departamento de armazenamento e embalagem, para venda posterior, sem distinção de qual máquina a produziu.

- (a) Qual é a proporção de peças defeituosas colocadas no mercado por essa fábrica?
- (b) Se um cliente identifica uma peça defeituosa, qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina 2?

Solução:

- (a) Na **Figura 6.1** representa-se a situação descrita no exemplo. Nosso experimento aleatório é o sorteio de uma peça produzida por essa fábrica e nosso espaço amostral, representado pelo retângulo, é o conjunto de todas as peças produzidas em determinado período. Podemos ver que o espaço amostral está dividido em 2 eventos mutuamente exclusivos: M_1 , peças produzidas pela máquina 1, e M_2 , peças produzidas pela máquina 2. Mais precisamente, $\Omega = M_1 \cup M_2$ – isso significa que M_1 e M_2 formam uma partição do espaço amostral. Um outro evento de interesse é o evento $D =$ “peça é defeituosa”. Podemos ver que esse evento tem interseção com os eventos M_1 e M_2 , ou seja, há peças defeituosas produzidas na máquina 1 e na máquina 2.

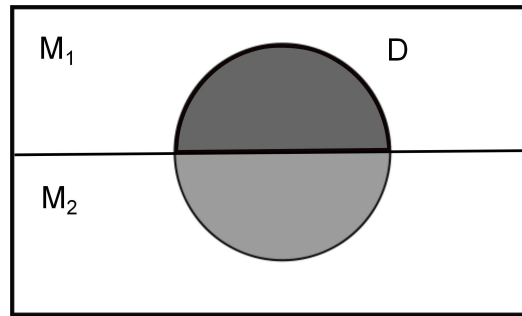


Figura 6.1 – Espaço amostral para o problema das 2 máquinas

Pelos dados do problema, temos uma estimativa *a priori* das proporções de peças produzidas em cada máquina, ou seja, as probabilidades *a priori* dos eventos M_1 e M_2 são:

$$P(M_1) = 0,35$$

$$P(M_2) = 0,65$$

Sabemos também a proporção de peças defeituosas produzidas por cada máquina. Essa proporção se traduz em uma probabilidade condicional: se a peça foi produzida pela máquina 1, existe 5% de chance de ser defeituosa; para a máquina 2, essa chance reduz-se a 2,5%. Em termos de probabilidade, temos

$$P(D|M_1) = 0,05$$

$$P(D|M_2) = 0,025$$

Como M_1 e M_2 formam uma partição de Ω , podemos escrever

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2)$$

Mas M_1 e M_2 são mutuamente exclusivos; logo, $(D \cap M_1)$ e $(D \cap M_2)$ também o são. Assim, pelo Axioma 3 da probabilidade, resulta que

$$\begin{aligned} P(D) &= P[(D \cap M_1) \cup (D \cap M_2)] \\ &= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) \end{aligned}$$

Pela regra da multiplicação (veja o capítulo anterior), sabemos que $P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$. Logo,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(M_1) P(D|M_1) + P(M_2) P(D|M_2) \\ &= 0,35 \times 0,05 + 0,65 \times 0,025 \\ &= 0,03375 \end{aligned}$$

Note que a probabilidade de uma peça ser defeituosa é uma média ponderada das probabilidades de defeito em cada máquina; os pesos são definidos de acordo com o nível de produção de cada máquina, ou seja de acordo com a probabilidade de a peça ser produzida em cada uma das máquinas.

- (b) Na segunda parte do exemplo, temos uma informação sobre a peça: ela é defeituosa, ou seja, sabemos que ocorreu o evento D . O que o problema pede é que, com essa informação, reavaliemos a probabilidade de a peça ter sido produzida pela máquina 2. Essa probabilidade é chamada probabilidade *a posteriori*, ou seja, é a probabilidade que calculamos depois de realizado o experimento de sorteio e teste da peça. Em notação matemática, temos que calcular $P(M_2|D)$. Por definição, temos

$$P(M_2|D) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)}$$

Usando a regra da multiplicação e o resultado encontrado no item anterior, resulta que

$$\begin{aligned} P(M_2|D) &= \frac{P(M_2) P(M_2|D)}{P(M_1) P(D|M_1) + P(M_2) P(D|M_2)} \\ &= \frac{0,65 \times 0,025}{0,35 \times 0,05 + 0,65 \times 0,025} \\ &= \frac{0,01625}{0,03375} = 0,4815 \end{aligned}$$

Compare os resultados: sem qualquer informação sobre o resultado do experimento, nossa estimativa para a probabilidade de ocorrência de M_2 – peça ser produzida pela máquina 2 – era 0,65; com a informação de que a peça é defeituosa, a probabilidade de ter sido produzida pela máquina 2 diminui para 0,4815.

EXEMPLO 6.2 *Produção de peças em três máquinas*

Considere novamente a situação do Exemplo 6.1, mas com a seguinte modificação: as peças são produzidas em três máquinas, que são responsáveis por 30%, 35% e 35% da produção, respectivamente. As proporções de peças defeituosas produzidas nessas máquinas são 5%, 2,5% e 2%.

- (a) Qual é a proporção de peças defeituosas produzidas na fábrica?
- (b) Se um cliente identifica uma peça defeituosa, qual é a probabilidade de que tenha sido produzida na máquina 1? E na máquina 2? E na máquina 3?

Solução:

- (a) O espaço amostral desse experimento está ilustrado no diagrama de árvore da **Figura 6.2**.

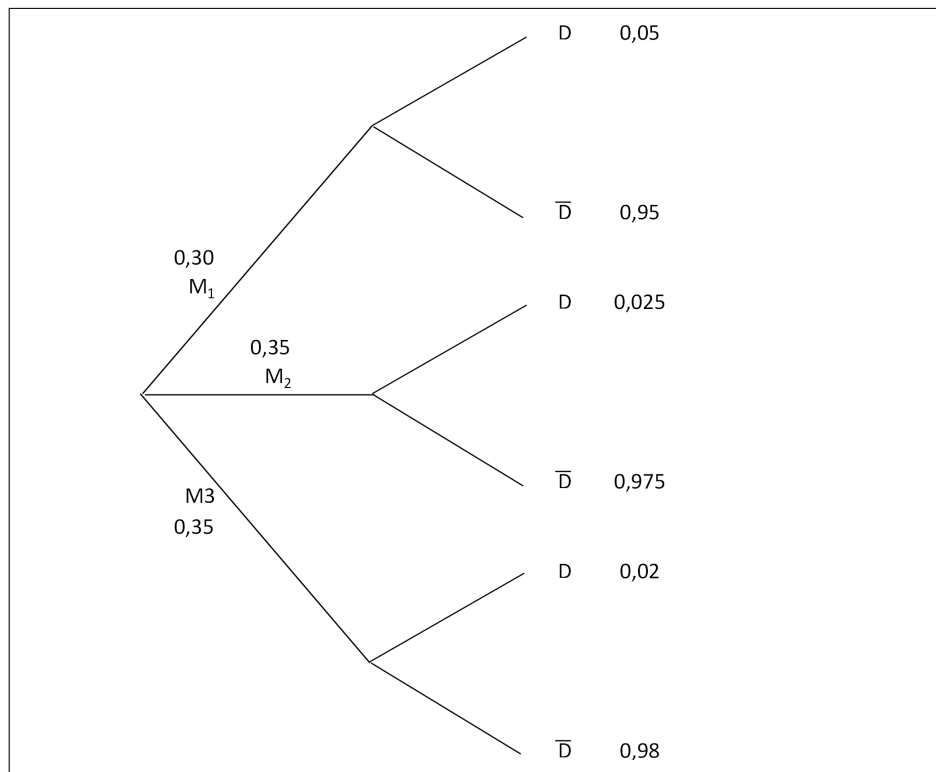


Figura 6.2 – Diagrama de árvore para o exemplo das 3 máquinas

Como visto no capítulo anterior, cada galho da árvore corresponde ao condicionamento do evento aos eventos dos galhos anteriores. Assim, na parte superior da árvore, temos os eventos $D|M_1$ e $\bar{D}|M_1$. Na parte do meio, temos os eventos $D|M_2$ e $\bar{D}|M_2$ e na parte inferior, $D|M_3$ e $\bar{D}|M_3$.

Os dados do problema nos dão as seguintes probabilidades a priori:

$$P(M_1) = 0,30$$

$$P(M_2) = P(M_3) = 0,35$$

e

$$\begin{aligned}P(D|M_1) &= 0,05 \\P(D|M_2) &= 0,025 \\P(D|M_3) &= 0,02\end{aligned}$$

Como antes, M_1 , M_2 e M_3 formam uma partição de Ω e, portanto, podemos escrever

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)$$

Mas M_1 , M_2 e M_3 são mutuamente exclusivos; logo, $(D \cap M_1)$, $(D \cap M_2)$ e $(D \cap M_3)$ também o são. Pelo Axioma 3 da probabilidade, resulta que

$$\begin{aligned}P(D) &= P[(D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)] \\&= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3)\end{aligned}$$

Pela regra da multiplicação, sabemos que $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$. Logo,

$$\begin{aligned}P(D) &= P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2)P(D|M_2) + P(M_3)P(D|M_3) \\&= 0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02 \\&= 0,03075\end{aligned}$$

Como antes, a probabilidade de uma peça ser defeituosa é uma média ponderada das probabilidades de defeito em cada máquina, com os pesos definidos de acordo com o nível de produção de cada máquina.

- (b) Na segunda parte do exemplo, deseja-se calcular as probabilidades a posteriori $P(M_1|D)$, $P(M_2|D)$ e $P(M_3|D)$. Por definição, temos

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)}$$

Usando a regra da multiplicação e o resultado encontrado no item anterior, resulta que

$$\begin{aligned}P(M_1|D) &= \frac{P(M_1)P(D|M_1)}{P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2)P(D|M_2) + P(M_3)P(D|M_3)} \\&= \frac{0,30 \times 0,05}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\&= \frac{0,015}{0,03075} = 0,487805\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(M_2|D) &= \frac{P(M_2)P(D|M_2)}{P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2)P(D|M_2) + P(M_3)P(D|M_3)} \\&= \frac{0,35 \times 0,025}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\&= \frac{0,00875}{0,03075} = 0,284553\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(M_3|D) &= \frac{P(M_3) P(D|M_3)}{P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2) P(D|M_2) + P(M_3) P(D|M_3)} \\&= \frac{0,35 \times 0,02}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\&= \frac{0,007}{0,03075} = 0,227642\end{aligned}$$

Note que $0,487805 + 0,284553 + 0,227642 = 1,000000$; esse resultado é imediato a partir do fato de que $P(\Omega) = 1$. Se ocorreu uma peça defeituosa, essa peça só pode ter vindo de umas das três máquinas.

EXEMPLO 6.3 *Soro da verdade*

Sabe-se que um “soro da verdade”, quando aplicado a um suspeito, é 90% eficaz quando a pessoa é culpada e 99% eficaz quando é inocente. Um suspeito é retirado de um grupo de pessoas, onde 95% jamais cometeram qualquer crime.

- (a) Qual é a probabilidade de o soro dar a resposta certa?
- (b) Se o soro indica “culpado”, qual é a probabilidade de o suspeito ser inocente?

Solução:

- (a) Vamos definir os seguintes eventos (veja a **Figura 6.3**):

C = “suspeito é culpado” $\overline{C}$ = “suspeito é inocente”

V = “soro indica culpado” $\overline{V}$ = “soro indica inocente”

Note que você tem que definir os eventos de acordo com a execução do experimento. Ao se aplicar um soro da verdade (ou plígrado), a resposta é “culpado” ou “inocente” e não “soro acerta” ou “soro erra”.

Os dados do problema nos dão as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned}P(V|C) &= 0,90 \\P(\overline{V}|\overline{C}) &= 0,99 \\P(\overline{C}) &= 0,95\end{aligned}$$

Usando o resultado sobre probabilidade do evento complementar, obtemos que:

$$\begin{aligned}P(\overline{V}|C) &= 0,10 \\P(V|\overline{C}) &= 0,01 \\P(C) &= 0,05\end{aligned}$$

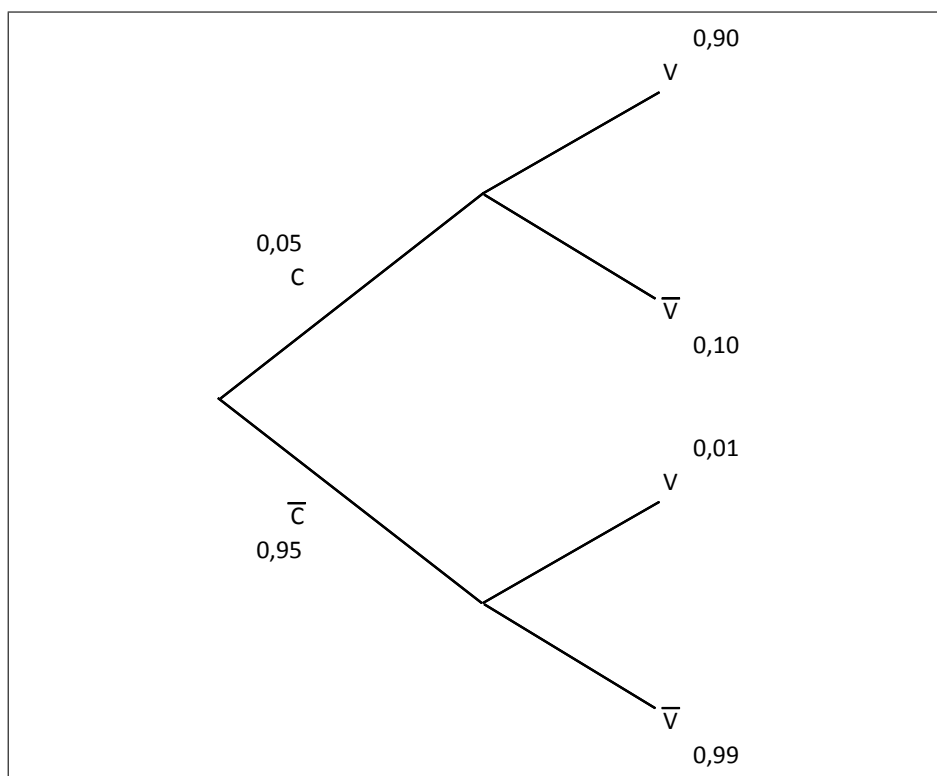


Figura 6.3 – Diagrama de árvore para o exemplo do soro da verdade

A partição do espaço amostral é definida pelos eventos C e $\bar{C}$, para os quais temos as probabilidades a priori. Os eventos de interesse são V e $\bar{V}$.

Seja o evento A = “soro acerta o diagnóstico”. Note que o soro pode diagnosticar corretamente, sendo o suspeito culpado ou inocente. Veja a tabela a seguir.

		Suspeito	
		Inocente $\bar{C}$	Culpado C
Resultado do soro	Inocente $\bar{V}$	OK!	Erro
	Culpado V	Erro	OK!

Dessa forma,

$$A = (C \cap V) \cup (\bar{C} \cap \bar{V})$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(C \cap V) + P(\bar{C} \cap \bar{V}) \\
 &= P(C)P(V|C) + P(\bar{C})P(\bar{V}|\bar{C}) \\
 &= 0,05 \times 0,90 + 0,95 \times 0,99 \\
 &= 0,9855
 \end{aligned}$$

(b) Queremos calcular $P(\bar{C}|V)$. Por definição temos que:

$$P(\bar{C}|V) = \frac{P(\bar{C} \cap V)}{P(V)}$$

O soror pode indicar culpado sendo o suspeito culpado (acerto do diagnóstico) ou inocente (erro no diagnóstico), ou seja:

$$\begin{aligned}P(V) &= P(V \cap C) + P(V \cap \overline{C}) \\&= P(V|C) \times P(C) + P(V|\overline{C}) \times P(\overline{C}) \\&= 0,90 \times 0,05 + 0,01 \times 0,95 = 0,045 + 0,0095 = 0,0545\end{aligned}$$

e

$$P(V \cap \overline{C}) = P(V|\overline{C}) \times P(\overline{C}) = 0,01 \times 0,95 = 0,0095$$

Logo,

$$P(\overline{C}|V) = \frac{0,0095}{0,0545} = 0,1743$$

EXEMPLO 6.4 *Moedas em uma caixa*

Uma caixa contém três moedas. A moeda 1 é honesta, a moeda 2 tem duas caras e a moeda 3 é viciada de tal modo que cara é duas vezes mais provável que coroa. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada.

- (a) Qual é a probabilidade de observarmos cara e moeda 1?
- (b) Qual é a probabilidade de observarmos cara?
- (c) Se o resultado foi cara, qual a probabilidade que a moeda lançada tenha sido a moeda 1?

Solução:

Vamos definir os eventos

$$\begin{aligned}K &= \text{cara} & C &= \text{coroa} \\M_1 &= \text{moeda 1} & M_2 &= \text{moeda 2} & M_3 &= \text{moeda 3}\end{aligned}$$

É dado que

$$P(K|M_1) = \frac{1}{2} \quad P(K|M_2) = 1$$

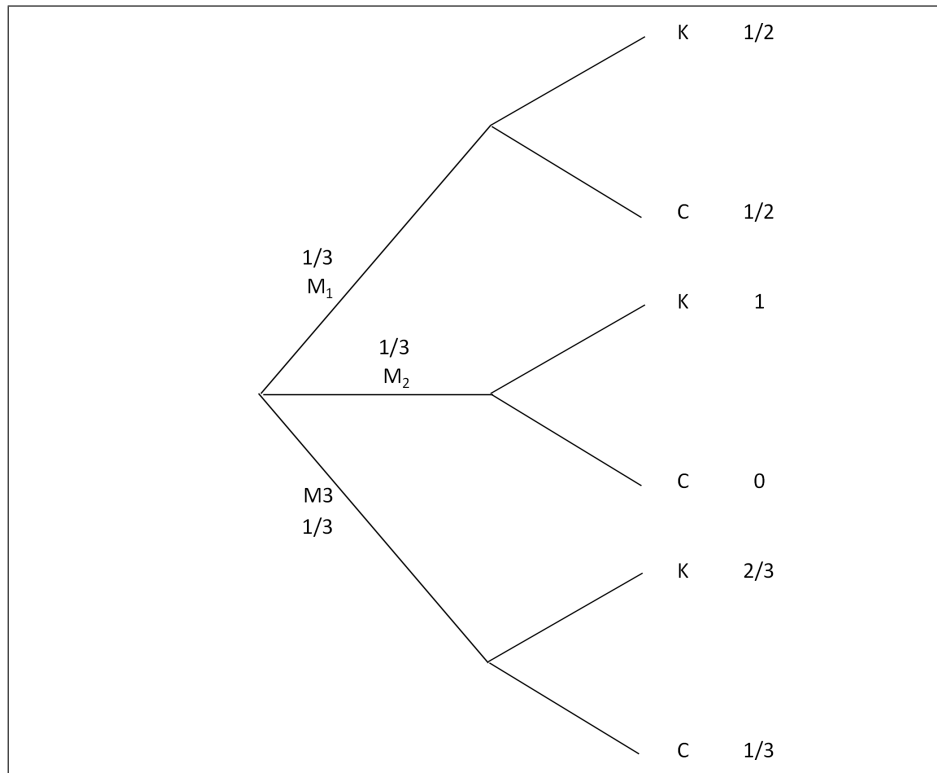
Para a moeda 3, como a probabilidade de cara é duas vezes a probabilidade de coroa e a soma dessas probabilidades tem que ser 1, resulta que

$$P(K|M_3) = \frac{2}{3}$$

Como a moeda lançada é escolhida aleatoriamente, temos que

$$P(M_1) = P(M_2) = P(M_3) = \frac{1}{3}$$

Veja a **Figura 6.4**.

**Figura 6.4** – Diagrama de árvore para o exemplo das 3 moedas

(a) Aqui a solução é consequência direta da regra de multiplicação:

$$\begin{aligned} P(K \cap M_1) &= P(M_1) \times P(K|M_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(b) Os eventos que formam a partição do espaço amostral são M_1 , M_2 e M_3 . Logo,

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K \cap M_1) + P(K \cap M_2) + P(K \cap M_3) = \\ &= P(M_1) \times P(K|M_1) + P(M_2) \times P(K|M_2) + P(M_3) \times P(K|M_3) = \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{6} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

(c) O problema pede

$$P(M_1|K) = \frac{P(K \cap M_1)}{P(K)} = \frac{P(M_1) \times P(K|M_1)}{P(K)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{18}} = \frac{3}{13}$$

EXEMPLO 6.5 Concessão de empréstimo

Um gerente de banco tem que decidir se concede ou não empréstimo aos clientes que o solicitam. Ele analisa diversos dados para estudar a possibilidade de o cliente vir a ficar

inadimplente. Com base em dados passados, ele estima em 15% a taxa de inadimplência. Dentre os inadimplentes, ele tem 80% de chance de tomar a decisão certa, enquanto que essa chance aumenta para 95% entre os clientes adimplentes. Esse gerente acaba de recusar um empréstimo. Qual é a probabilidade de ele ter tomado a decisão correta?

Solução:

Os fatos envolvidos nesse processo decisório são: “cliente é inadimplente ou não” e “gerente concede ou não o empréstimo”. Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} I &= \text{“cliente é inadimplente”} \\ C &= \text{“gerente concede empréstimo”} \end{aligned}$$

Usaremos a notação de evento complementar para definir

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \text{“cliente é adimplente”} \\ \bar{C} &= \text{“gerente não concede empréstimo”} \end{aligned}$$

Note que temos duas possibilidades de acerto e duas possibilidades de erro. Os acertos são:

- cliente é inadimplente e gerente não concede o empréstimo
- cliente é adimplente e gerente concede o empréstimo

Os erros são:

- cliente é inadimplente e gerente concede o empréstimo
- cliente é adimplente e gerente não concede o empréstimo

A árvore que representa o espaço amostral é dada na **Figura 6.5**.

As probabilidades dadas são

$$\begin{aligned} P(I) &= 0,15 \\ P(\bar{C}|I) &= 0,80 \text{ (decisão certa dado cliente inadimplente)} \\ P(C|\bar{I}) &= 0,90 \text{ (decisão certa dado cliente adimplente)} \end{aligned}$$

Pela lei do complementar, resulta que

$$\begin{aligned} P(\bar{I}) &= 0,85 \\ P(C|I) &= 0,20 \\ P(\bar{C}|\bar{I}) &= 0,10 \end{aligned}$$

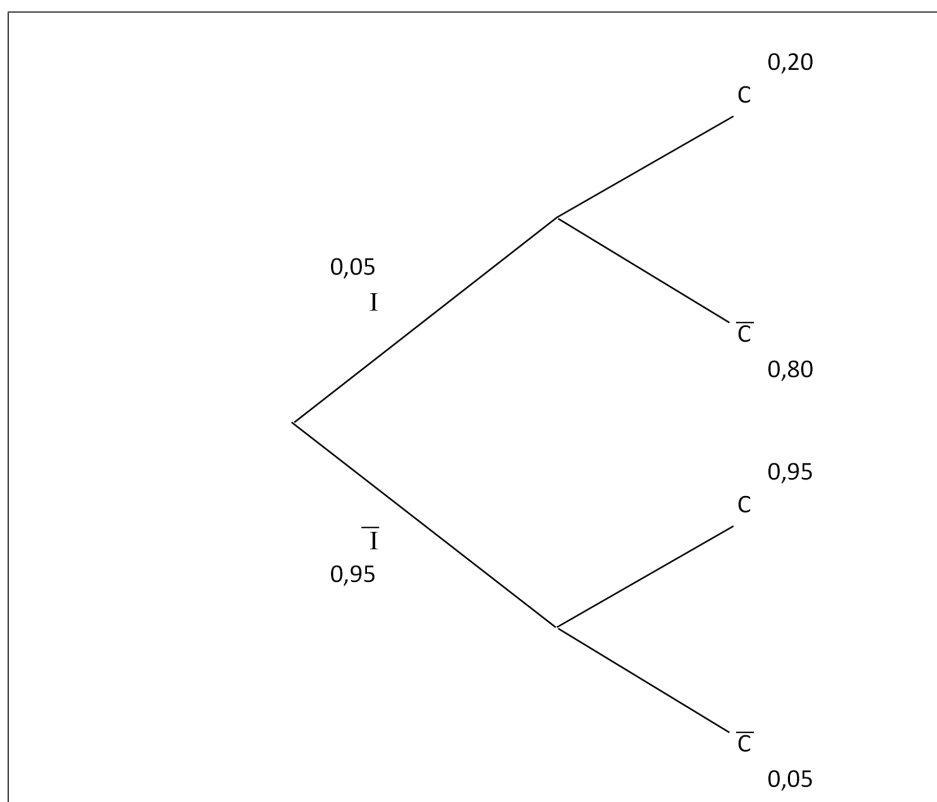


Figura 6.5 – Diagrama de árvore para o exemplo gerente de banco

Com relação ao que o problema pede, temos que, dado que o gerente *recusou* o empréstimo, a decisão só será certa se o cliente for *inadimplente*. Logo, temos que calcular

$$P(I|\bar{C}) = \frac{P(I \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}$$

Mas, o gerente pode recusar o empréstimo sendo o cliente inadimplente ou não, ou seja,

$$\begin{aligned} P(\bar{C}) &= P(\bar{C} \cap I) + P(\bar{C} \cap \bar{I}) \\ &= P(I) P(\bar{C}|I) + P(\bar{I}) P(\bar{C}|\bar{I}) \\ &= 0,15 \times 0,80 + 0,85 \times 0,10 \\ &= 0,205 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(I|\bar{C}) &= \frac{P(I \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} \\ &= \frac{P(I) P(\bar{C}|I)}{P(I) P(\bar{C}|I) + P(\bar{I}) P(\bar{C}|\bar{I})} \\ &= \frac{0,15 \times 0,80}{0,205} \\ &= 0,5854 \end{aligned}$$

6.1 Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes

Considere a **Figura 6.6**, onde $A_1, A_2, \dots, A_n$ é uma partição do espaço amostral Ω e B um evento qualquer em Ω .

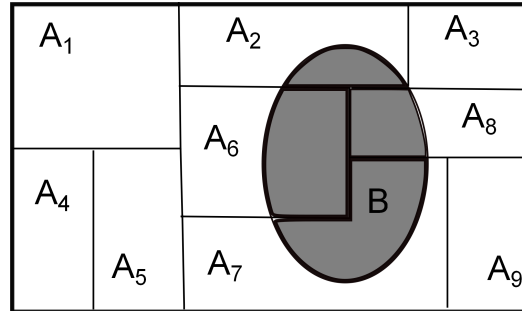


Figura 6.6 – Espaço amostral para o problema das 2 máquinas

Como a união de todos os A_i 's é o espaço amostral, segue que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$$

O fato de alguns desses termos ser o conjunto vazio (por exemplo, $B \cap A_1 = \emptyset$) não invalida o resultado, uma vez que $A \cup \emptyset = A$. Por definição de partição, os A_i 's são mutuamente exclusivos dois a dois; logo, os eventos $A_i \cap B$ também o são. Então, pela lei da probabilidade de eventos disjuntos, podemos escrever

$$\begin{aligned} P(B) &= P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)] = \\ &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \end{aligned}$$

e a regra da multiplicação nos dá que

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

Esse resultado é conhecido como teorema da probabilidade total.



Teorema da probabilidade total

Seja $A_1, A_2, \dots, A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer em Ω . Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i) \quad (6.1)$$

Como visto, a probabilidade $P(A_i)$ é denominada *probabilidade a priori do evento A_i* . Continuando no contexto da **Figura 6.6**, suponhamos agora que B tenha ocorrido. Vamos usar essa informação para calcular a *probabilidade a posteriori* do evento A_i , ou seja, vamos calcular $P(A_i|B)$. Por definição temos que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Usando a regra da multiplicação e o teorema da probabilidade total, resulta que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(A_i|B)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) P(B|A_j)}$$

Esse resultado é conhecido como teorema de Bayes.



Teorema de Bayes

Seja $A_1, A_2, \dots, A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer em Ω . Então

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(A_i|B)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) P(B|A_j)} \quad (6.2)$$

É importante que, na resolução de exercícios e também na aplicação prática desses teoremas, você identifique os eventos de interesse, os eventos que definem a partição do espaço amostral e quais são as probabilidades a priori. Em geral, são essas probabilidades que identificam a partição de Ω . Vamos considerar mais um exemplo para ilustrar esses pontos.

EXEMPLO 6.6 *Alunos e carros*

Em uma turma de Administração, 65% dos alunos são do sexo masculino. Sabe-se que 30% dos alunos têm carro, enquanto que essa proporção entre as alunas se reduz para 18%. Sorteia-se ao acaso um estudante dessa turma usando o seu número de matrícula e constata-se que possui um carro. Qual é a probabilidade de que a pessoa sorteada seja do sexo feminino?

Solução:

Os eventos em questão envolvem o sexo do aluno e a posse de um carro. Vamos definir os eventos de interesse da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H &= \text{homem} & M &= \text{mulher} \\ C &= \text{possui carro} & \overline{C} &= \text{não possui carro} \end{aligned}$$

Note que H e M definem uma partição do espaço amostral, assim como C e $\bar{C}$. No entanto, as probabilidades a priori dadas referem-se a H e M ; logo, a partição de Ω será definida em termos desses eventos. Os dados do problema nos dão que

$$\begin{aligned}P(H) &= 0,65 \Rightarrow P(M) = 0,35 \\P(C|H) &= 0,30 \Rightarrow P(\bar{C}|H) = 0,70 \\P(C|M) &= 0,18 \Rightarrow P(\bar{C}|M) = 0,82\end{aligned}$$

O problema pede $P(M|C)$ e para calcular essa probabilidade, temos que calcular $P(C)$. Pelo teorema da probabilidade total, sabemos que

$$\begin{aligned}P(C) &= P(C \cap M) + P(C \cap H) \\&= P(M)P(C|M) + P(H)P(C|H) \\&= 0,35 \times 0,18 + 0,65 \times 0,70 \\&= 0,518\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}P(M|C) &= \frac{P(C \cap M)}{P(C)} \\&= \frac{P(M)P(C|M)}{P(C)} \\&= \frac{0,35 \times 0,18}{0,518} \\&= 0,12162\end{aligned}$$



6.2 Exercícios Propostos

6.1 *Uma propaganda de um curso preparatório para a prova da ANPEC diz que 80% dos seus alunos conseguem ingressar em algum programa de Mestrado em Economia. Dos cadastros da ANPEC, sabe-se que 15% dos candidatos aos programas de Mestrado escolhem esse curso e que o índice geral de aprovação é de 63%. (Dados fictícios)*

- (a) *Se um candidato não escolhe esse curso, qual é a probabilidade de ele passar no exame da ANPEC?*
- (b) *Sabe-se que um aluno foi aprovado, conseguindo ingressar no programa de Mestrado de uma grande universidade. Qual é a probabilidade de ele ter frequentado este curso preparatório?*

6.2 *Em uma localidade, 8% dos adultos sofrem de determinada doença. Um médico local diagnostica corretamente 95% das pessoas que têm a doença e diagnostica erradamente 2% das pessoas que não a têm. Um adulto acaba de ser diagnosticado pelo médico como portador da doença. Qual é a probabilidade de esse adulto ter, de fato, a doença?*

6.3 Uma urna contém 4 bolas numeradas de 1 a 4. Duas bolas são retiradas sem reposição. Seja A o evento “soma é 5” e seja B_i o evento “primeira bola sorteada tem o número i ”, $i = 1, 2, 3, 4$. Calcule $P(A|B_i)$ e $P(B_i|A)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

6.4 Resolva o exercício anterior, supondo que as extrações sejam feitas com reposição.

6.5 Numa prova há 7 perguntas do tipo Verdadeiro-Falso. Calcule a probabilidade de um aluno acertar todas as 7 questões

(a) se ele “chuta” as respostas;

(b) se ele “chuta” as respostas, mas sabendo que há mais Verdadeiros do que Falsos.

6.6 Continuação do Exercício 5.12. O Ministério da Economia da Espanha acredita que a probabilidade de a inflação ficar abaixo de 3% este ano é de 0,20; entre 3% e 4% é de 0,45 e acima de 4% é de 0,35. O Ministério acredita que, com inflação abaixo de 3%, a probabilidade de se criar mais 200.000 empregos é de 0,6, diminuindo essa probabilidade para 0,3 caso a inflação fique entre 3% e 4%; no entanto, com inflação acima de 4%, isso é totalmente impossível. No ano seguinte, um economista estrangeiro constata que foram criados 200.000 empregos novos. Qual é a probabilidade de a inflação ter ficado abaixo de 3%?

6.7 Continuação do Exercício 5.14. Joana quer enviar uma carta a Camila. A probabilidade de que Joana escreva a carta é $\frac{8}{10}$. A probabilidade de que o correio não a perca é $\frac{9}{10}$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é também $\frac{9}{10}$. Dado que Camila não recebeu a carta, qual é a probabilidade de que Joana não a tenha escrito?

6.8 Continuação do Exercício 5.22. Um aluno responde a uma questão de múltipla escolha com 4 alternativas, com uma só correta. A probabilidade de que ele saiba a resposta certa da questão é de 30%. Se ele não sabe a resposta, existe a possibilidade de ele acertar “no chute”. Não existe a possibilidade de ele obter a resposta certa por “cola”. Se o aluno acertou a questão, qual é a probabilidade de ele ter “chutado” a resposta?

6.9 Consideremos dois dados: um deles é equilibrado e o outro viciado, com $P(1) = 0,5$ e $P(2) = \dots = P(6) = 0,1$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e efetuam-se dois lançamentos, que resultam ambos na face 1. Qual a probabilidade de ter sido escolhido o dado viciado?

6.10 Uma urna tem 3 bolas brancas, 3 pretas e 4 azuis. Duas bolas são retiradas ao acaso e substituídas por 5 vermelhas. Depois disso, retira-se uma bola. Qual é a probabilidade de ser azul?

6.11 São dadas as urnas A , B e C . Da urna A é retirada uma bola, que é colocada na urna B . Da urna B retira-se, então, uma bola que é colocada na urna C . Retira-se em seguida uma bola da urna C . A probabilidade de ocorrer bola de cor vermelha na última extração é 0,537. Determinar o valor de x sabendo que as urnas têm as seguintes composições:

$$A : \begin{cases} 7V \\ 3P \end{cases} \quad B : \begin{cases} 3V \\ 6P \end{cases} \quad C : \begin{cases} 9-x & V \\ x & P \end{cases}$$

onde V representa bola vermelha e P , bola preta.

6.12 O chefe do Setor de Compras de uma empresa trabalha com 3 grandes distribuidores de material de escritório. O distribuidor 1 é responsável por 70% dos pedidos, enquanto cada um dos outros 2 distribuidores responde por 15% dos pedidos. Dos registros gerais de compra, sabe-se que 6% dos pedidos chegam com atraso. A proporção de pedidos com atraso do distribuidor 1 é a metade da proporção do distribuidor 2 que, por sua vez, é o dobro da proporção do distribuidor 3. Calcule a porcentagem de pedidos com atraso de cada um dos distribuidores.

6.13 O gerente de Recursos Humanos de uma empresa escolhe estagiários oriundos de dois cursos de Administração. No curso 1, a proporção de alunos com boa formação em informática é de 60%, enquanto no outro curso, essa proporção cai para 40%. Um estagiário acaba de ser contratado. A probabilidade de que tenha boa formação em informática é 0,44. Qual é a preferência (probabilidade) do gerente pelo curso 1?

6.14 Em um escritório de contabilidade, o contador-chefe tem três auxiliares, um que trabalha em tempo integral e os outros dois que trabalham em tempo parcial. O funcionário de tempo integral é responsável por 50% dos balancetes, enquanto cada um dos funcionários de tempo parcial responde pela metade dos balancetes restantes. Nos últimos 2 meses, a proporção de balancetes com erros oriundos do funcionário de tempo integral foi de 5%, enquanto para os funcionários de tempo parcial essas proporções foram de 6% e 8%. O chefe resolve, então, fazer um novo treinamento, discutindo os principais erros encontrados. No mês seguinte ao treinamento, a proporção de balancetes com erro cai pela metade, com cada funcionário de tempo parcial produzindo a mesma proporção de balancetes com erro, igual à metade da proporção de erros do funcionário de tempo integral. Quais são as novas proporções de balancetes com erro de cada funcionário?

6.15 Um empreiteiro apresentou orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte hidráulica de um edifício. Ele acha que a probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de $1/2$. Caso ele ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte hidráulica é de $3/4$; caso contrário, essa probabilidade é de $1/3$. Qual é a probabilidade de ele:

- (a) ganhar os dois contratos?
- (b) ganhar apenas um?
- (c) não ganhar qualquer contrato?